Liczby Turána i Ramsey dla 3-jednolitych ścieżek

Eliza Jackowska-Boryc

Na początku mojej rozprawy doktorskiej wprowadziłam najważniejsze pojęcia i definicje. Dla $k \geqslant 2$, *k-jednolitym hipergrafem* (lub *k-grafem*) nazywamy uporządkowaną parę $H = (V, E)$, gdzie V jest skończonym, niepustym zbiorem wierzchołków, a $E \subseteq \binom{V}{k}$ jest zbiorem różnych, k-elementowych podzbiorów zbioru V, nazywanych krawędziami.

Jednym z kluczowych pytań dotyczących ekstremalnej teorii hipergrafów są zagadnienia związane z wyznaczaniem liczb Turána i liczb Ramseya. Wyznaczanie liczb Ramseya jest jednym z najtrudniejszych problemów związanych z teorią Ramseya (Graham, Rothschild, Spencer, 1980). W tej rozprawie, skupię się głównie na liczbach Ramseya dla hipergrafów. Klasyczne liczby Ramseya są trudne do wyznaczenia i niewiele o nich wiemy. Z tego powodu, w hipergrafowej teorii Ramseya zaczęto badać inne, mniej gęste struktury, takie jak między innymi hiperścieżki i hipercykle.

Istnieje kilka definicji k-jednolitych ścieżek i cykli. W tej rozprawie skupimy się na symetrycznym przypadku, kiedy dwie sąsiednie krawędzie mają dokładnie jeden wspólny wierzchołek.

Luźną ścieżką P^k_l nazywamy k-graf o l krawędziach $e_1, \ldots, e_l$ takich, że $|e_i \cap e_j| = 0$ jeżeli $|i - j| > 1$ i $|e_i \cap e_j| = 1$ jeżeli $|i - j| = 1$. W mojej pracy szczególnie skupię się na 3-jednolitej luźnej ścieżce długości 3 P^3_3. Często używanym narzędziem w naszych dowodach jest 3-jednolity cykl długości 3, C^3_3, nazywany trójkątem.

Naszym głównym wynikiem dotyczącym Teorii Ramseya jest Twierdzenie 2.2, które stwierdza, że $R(P^3_3; r) = r + 6$, dla liczby kolorów $r \leqslant 7$, podczas gdy Twierdzenie 2.1, jest szczególnym przypadkiem Twierdzenia 2.2 dla $r = 3$. Twierdzenia te zostały udowodnione w Rozdziale 3. Dowód ograniczenia dolnego opiera się na konstrukcji podanej przez Gyárfása i Raeisiego (2012). W mojej wersji dla $r \geqslant 2$, jeżeli k-graf F nie jest gwiazdą, wtedy zachodzi $R(F; r) \geqslant r + |V(F)| - 1$. Następnie przeprowadzimy dwa dowody ograniczenia górnego w Twierdzeniu 2.1. Pierwszy dowód, który nie został opublikowany, polega na szczegółowej analizie wszystkich przypadków, podczas gdy drugi dowód opiera się na powszechnie znanej strategii oszacowania ograniczenia górnego na liczbę Ramseya przy wykorzystaniu liczb Turána.

Liczba Turána $\mathrm{ex}_3(n; P^3_3)$ została wyznaczona dla wszystkich n w Twierdzeniu 2.7. Okazuje się jednak, że niezbędnym narzędziem aby wyznaczyć wielokolorową liczbę Ramseya jest inny rodzaj liczby Turána o definicji iteracyjnej. Dla k-grafu F i liczb naturalnych $s, n \geqslant 1$, liczba Turána rzędu s jest zdefiniowana jako $\mathrm{ex}^{(s)}_k(n; F) = max\{|E(H)| : |V(H)| = n, H \not\supseteq F$, and $\forall H' \in Ex^{(1)}_k(n; F) \cup \cdots \cup Ex^{(s-1)}_k(n; F), H \not\subseteq H'\}$, jeżeli taki k-graf H istnieje. k-graf H o n wierzchołkach, gdzie $H \not\supseteq F$ jest nazywany s-ekstremalnym dla F jeżeli $|E(H)| = ex^{(s)}_k(n; F)$ i $\forall H' \in Ex^{(1)}_k(n; F) \cup \cdots \cup Ex^{(s-1)}_k(n; F), H \not\supseteq H'$. Rodzinę k-grafów o n wierzchołkach, które są s-ekstremalne dla F, oznaczamy przez $Ex^{(s)}_k(n; F)$.

Aby udowodnić Twierdzenie 2.2 musimy najpierw wyznaczyć liczbę Turána drugiego rzędu, $\mathrm{ex}^{(2)}_3(n; P^3_3)$ (Twierdzenie 2.9), oraz liczbę Turána trzeciego rzędu, $\mathrm{ex}^{(3)}_3(12; P^3_3)$ (Twierdzenie 2.10). Zakończymy Rozdział 3 dowodem Twierdzenia 2.2, kładąc nacisk na zastosowanie liczb Turána wyższych rzędów.

Następnie skupimy się na dowodzie Twierdzenia 2.7, mianowicie nad wyznaczeniem liczby Turána $\mathrm{ex}_3(n; P_3^3)$ i wskazaniem unikalnego grafu ekstremalnego dla każdego n. Dowód tego twierdzenia w głównej mierze opiera się na ideii współistnienia w jednym 3-grafie kopii P_3^3 oraz trójkąta C_3^3. Dlatego też, na początku Rozdziału 4 musimy wprowadzić kolejny rodzaj liczby Turána. Dla k-grafów F i G gdzie $F \nsubseteq G$, i liczby naturalnej $n \geqslant |V(G)|$, warunkowa liczba Turána jest zdefiniowana jako $\mathrm{ex}_k(n; F|G) = max\{|E(H)| : |V(H)| = n, H \nsupseteq F, \text{ and } H \supseteq G\}$.

Następnie przeprowadzimy dwa dowody Twierdzenia 2.7. Pierwszy dowód został opublikowany w naszej pracy (Jackowska, Polcyn, Ruciński, 2016), podczas gdy idea drugiego dowodu Twierdzenia 2.7 została zasugerowana przez jednego z recenzentów tego samego artykułu (patrz podziękowania w tej pracy).

Warunkowe liczby Turána są potrzebne nie tylko w dowodzie Twierdzenia 2.7, ale także później w Rozdziale 5. Rozdział 4 zakończymy rozważeniem zastosowań warunkowych liczb Turána dla nieprzecinających się 3-grafów, oraz sformułujemy dwa ważne wyniki, Twierdzenie 4.9 i Twierdzenie 4.11, które będą potrzebne w dowodach Twierdzeń 2.9 i 2.10.

W Rozdziale 5 skupimy się na dowodzie Twierdzenia 2.9, wyznaczeniu liczby Turána drugiego rzędu $\mathrm{ex}_3^{(2)}(n; P_3^3)$ dla każdego n, oraz dowodzie Twierdzenia 2.10, wyznaczeniu liczby Turána trzeciego rzędu dla $\mathrm{ex}_3^{(3)}(12; P_3^3)$. W tych dowodach użyjemy pewnych twierdzeń sformułowanych wcześniej, w szczególności Twierdzenia 4.9.

Rozprawę zakończę krótkim podsumowaniem najważniejszych wyników, oraz zaprezentowaniem pewnych powiązanych problemów otwartych.

Eliza Jackowska-Boryc