RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ MAGISTRA HENRYKA KASPRZAKA "ROZWIĄZANIE PROBLEMU ISTNIENIA PODPRZESTRZENI NIEZMIENNICZYCH DLA OPERATORÓW LINIOWYCH CIĄGŁYCH NA NIEARCHIMEDESOWYCH PRZESTRZENIACH KÖTHEGO"

PROF. DR HAB. WOJCIECH BANASZCZYK

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego

Łódź, 5 października 2019 r.

Niech E będzie przestrzenią wektorową i niech $T: E \to E$ będzie operatorem liniowym. Mówimy, że podprzestrzeń liniowa $M \subset E$ jest podprzestrzenią niezmienniczą operatora T, jeżeli $T(M) \subset M$. Naturalne pytanie, czy każdy ciągły operator liniowy w przestrzeni Banacha posiada nietrywialną domkniętą podprzestrzeń niezmienniczą, okazało się niezwykle trudne. Pierwszy przykład operatora bez podprzestrzeni niezmienniczych w przestrzeni zespolonej podany został dopiero w połowie lat siedemdziesiątych (patrz prace [4] i [12]– [14]) (wszystkie odsyłacze odnoszą się do bibliografii zamieszczonej na końcu rozprawy). Odpowiedni przykład operatora w zespolonej nuklearnej przestrzeni Frécheta podany został w pracy [1].

Przedstawiona rozprawa doktorska poświęcona jest zagadnieniu istnienia podprzestrzeni niezmienniczych w niearchimedesowych przestrzeniach Köthego. Dokładniej, pokazuje ona, że w wielu niearchimedesowych przestrzeniach Köthego można skonstruować ciągły operator liniowy bez (nietrywialnych, domkniętych) podprzestrzeni niezmienniczych. Wyniki rozprawy są uogólnieniem wyników uzyskanych wcześniej przez autora w pracy [8]

Praca [8] zawiera pierwszy opublikowany przykład operatora bez podprzestrzeni niezmienniczych działającego w niearchimedesowej przestrzeni Köthego, która nie jest przestrzenią Banacha (dla niearchimedesowych przestrzeni Banacha przykład taki podany został wcześniej w pracy promotora [18]).

Nie ma tu miejsca na sformułowanie głównych wyników rozprawy; wymagałoby to wprowadzenia wielu pojęć i oznaczeń. Najważniejsze dwa twierdzenia zostały czytelnie sformułowane w Streszczeniu, na stronach 4 i 5.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

W rozprawie rozważa się operatory liniowe ciągłe w przestrzeni Köthego $\Lambda(A)$, gdzie $A = (a_n^k)_{k,n\in\mathbb{N}}$ jest odpowiednią nieskończoną macierzą o wyrazach dodatnich. Całość została podzielona na trzy rozdziały. W rozdziale pierwszym pokazuje się, że przy założeniu istnienia pewnych funkcji spełniających szereg dość skomplikowanych warunków możliwe jest określenie ciągłego operatora liniowego $T\colon \Lambda(A) \to \Lambda(A)$, który nie ma podprzestrzeni niezmienniczych. Główna idea rozumowania jest następująca. Najpierw konstruuje się, w bardzo skomplikowany sposób, operator liniowy $T_0\colon \Lambda_0(A) \to \Lambda_0(A)$, gdzie $\Lambda_0(A) \subset \Lambda(A)$ jest podprzestrzenią złożoną z ciągów skończonych. Następnie wykazuje się, że operator T_0 jest ciągły, zatem przedłuża się do ciągłego operatora $T\colon \Lambda(A) \to \Lambda(A)$. Wreszcie dowodzi się, że ten przedłużony operator T nie posiada podprzestrzeni niezmienniczych. Główny ciężar dowodu spoczywa w dowodzie twierdzenia 1.9, który zajmuje ponad 8 stron przekształceń i wzorów.

Przedstawiony w rozdziale pierwszym ogólny schemat postępowania zostaje następnie w rozdziale drugim opisany dokładniej w dwóch szczególnych przypadkach, co pozwala na łatwiejsze zastosowanie tego schematu w konkretnych sytuacjach. Wreszcie w rozdziale trzecim dowodzi się, że jeśli wyrazy macierzy A spełniają określone warunki, to istnieją funkcje spełniające warunki sformułowane w rozdziale pierwszym, a w konsekwencji istnieją operatory w przestrzeni Köthego $\Lambda(A)$ bez podprzestrzeni niezmienniczych. Przy tym otrzymuje się tu cały szereg twierdzeń, dla rozmaitych założeń o współczynnikach macierzy A.

Rezultaty rozprawy są nowe, oryginalne i głęboko nietrywialne. Z pewnością będą one interesujące dla specjalistów zajmujących się niearchimedesową analizą funkcjonalną. Stosowane narzędzia są standardowymi narzędziami analizy niearchimedesowej. Zamieszczone w rozprawie rozumowania są dość elementarne, niemniej jednak bardzo złożone technicznie.

Rozprawa jest długa, może nawet zbyt długa. Pewne fragmenty rozumowań są do siebie dość podobne. Zwłaszcza dotyczy to rozdziału trzeciego. Należy oczywiście docenić ogrom pracy włożonej przez doktoranta w sprawdzenie i porządne zapisanie wszystkich szczegółów dowodów. Jednak, przynajmnie w moim subiektywnym przekonaniu, tekst można by istotnie skrócić bez większej szkody dla jego wartości. Sformułowanie *there exists a linear and continuous operator* $T\colon \Lambda(A) \to \Lambda(A)$ *that has no nontrivial invariant subspaces* powtarza się tyle razy, że można by spróbować znaleźć jakieś określenie czy skrót dla opisania takiej sytuacji.

Rozprawa jest napisana i zredagowana bardzo jasno i przejrzyście. Jest widoczne, że autor włożył dużo wysiłku w odpowiednie uporządkowanie materiału i dobranie stosownych oznaczeń.

Podsumowując, uważam, że przedstawiona rozprawa magistra Henryka Kasprzaka stanowi istotny wkład do teorii niearchimedesowej i jestem przekonany, że spełnia ona wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim.

W. Bych