Zielona Góra, 12. 07. 2017

Prof. dr hab. Janusz Matkowski
Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii
Uniwersytet Zielonogórski

Recenzja rozprawy doktorskiej pana dra hab. Piotra Maćkowiaka,

pt.
Nieliniowe operatory superpozycji w przestrzeni funkcji o ograniczonej wariacji

dla Wydziału Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Każda funkcja dwóch zmiennych $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ generuje operator superpozycji $F : \mathbb{R}^{[0,1]} \to \mathbb{R}^{[0,1]}$ wzorem

$$F(x)(t) := f(t, x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^{[0,1]}, \ t \in [0,1],$$

nazywanym operatorem Niemyckiego lub operatorem superpozycji. Operator F nazywa się autonomicznym jeśli f nie zależy od t.

Operatorom Niemyckiego tym poświęcono szereg prac i opracowań monograficznych. Jednym z podstawowych pytań ich dotyczącym brzmi następująco: Dla ustalonej przestrzeni funkcji $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^{[0,1]}$ znaleźć warunki konieczne i dostateczne na to aby F przekształcało $\mathcal{F}$ w siebie ("acting conditions", warunki działania). Dla pewnych przestrzeni $\mathcal{F}$ takie warunki zostały znalezione - np. Krasnosielski podał je dla przestrzeni funkcji ciągłych. Dla pewnych przestrzeni znane są jedynie warunki wystarczające - np. warunki Carathodory'ego dla funkcji mierzalnych. Wiadomo, że istnieją nieciągłe funkcje f, generujące takie nieautonomicze operatory F, które przekształcają klasę funkcji $C^1([0,1])$ o ciągłych pochodnych w siebie. Pokazuje to, że pytania takie są na ogół nietrywialne.

Recenzowana rozprawa doktorska, poświęcona jest m.in. temu zagadnieniu dla przestrzeni $BV[0,1]$ funkcji o wahaniu ograniczonym w ogólnym nieautonomicznym przypadku. W przypadku operatorów autonomicznych pełna charakteryzacja została opracowana przez M. Josephy'ego w 1981 roku.

Rozprawa składa się z następujących trzech publikacji:

1. Daria Bugajewska, Dariusz Bugajewski, Piotr Kasprzak, **Piotr Maćkowiak**, *Nonautonomous superposition operators in the spaces of functions of bounded variation*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Vol. **48** (2016), 63-7-660;

2. Piotr Kasprzak, **Piotr Maćkowiak**, *Local boundedness of nonautonomous superposition operators in* $BV[0,1]$, Bull. Aust. Math. 92 (2015), 325-341;

3. **Piotr Maćkowiak**, *On the continuity of superposition operators in the space of functions of bounded variation*, Aequationes Mathematicae, Published online 10 May, 2017.

W monografii J. Appella I P.P.Zabrejki, Nonlinear Superposition Operators, Cambridge University Press, Cambridge, (1990), jej autorzy przytaczają i dowodzą wynik rosyjskiego matematyka A.G. Ljamina (1986) podającego warunki wystarczające na to aby operator F działał z $BV[0,1]$ siebie. D. Bugajewska, w pracy opublikowanej w roku 2010, sformułowała przypuszczenie, że ten wynik jest fałszywy, a w recenzji Zentralblatt für Mathematik, D. Bugajewski wskazał błąd w dowodzie tego twierdzenia. Problem ostatecznie rozstrzyga Doktorant, podając kontrprzykład w pracy opublikowanej w PAMS w roku 2014. Wynik ten sprowadził zagadnienie "warunków działania" do dla przestrzeni $BV[0,1]$ do sytuacji wyjściowej.

W roku 2014 ukazała się monografia J. Appella. J. Banasia i N. Merentesa, *Bounded variation and around*, Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 17. De Gruyter, Berlin (2014), w samym wstępie której, autorzy świadomi stanu rzeczy, przypominają trzy podstawowe problemy teorii operatorów superpozycji w przestrzeni $BV[0,1]$. Pierwszy z nich dotyczy warunków koniecznych i dostatecznych na to by (nieautonomiczny) operator F przekształcał $BV[0,1]$ w siebie.

W pierwszej z powyżej wymienionych prac Doktoranta, wspólnej z D. Bugajewską, D. Bugajewskim i P. Kasprzakiem, najpierw modyfikuje się wynik D. Bugajewskiej podający warunki wystarczające na to by $F(BV[0,1]) \subset BV[0,1]$, ilustrując istotność tej modyfikacji odpowiednim przykładem, a następnie bada się warunki na lokalną ograniczoność operatora F. Pokazuje się (Proposition 3.6), że skończoność zbioru $\left\{t \in [0,1] : \sup_{u\in[-r,r]} |f(t,u)| = +\infty\right\}$ dla każdego $r > 0$, jest warunkiem koniecznym oraz, zauważa się (Theorem 3.7), że jeśli $F(BV[0,1]) \subset BV[0,1]$ to, na ogół, niczego nie można powiedzieć o generatorze f.

Główny wynik tej pracy (Theorem 3.8) powiada, że *operator F generowany przez funkcję $f : [0,1] \times R \to R$ odwzorowuje $BV[0,1]$ w siebie i jest lokalnie ograniczony wtedy i tylko wtedy gdy spełnia następujący warunek*

(b) *dla każdego $r > 0$ istnieje taka stała $M_r > 0$, że dla każdej liczby naturalnej k, dla każdego silnie rosnącego ciągu $(t_i)_{i=0}^k$, $t_0 = 0$, $t_k = 1$; i dla każdego ciągu $(u_i)_{i=0}^k$ o elementach z przedziału $[-r,r]$ i takiego, że $\sum_{i=1}^k |u_i - u_{i-1}| \leq r$, funkcja f spełnia następujące dwie nierówności:*

$$\sum_{i=1}^{k} |f(t_i,u_i) - f(t_{i-1},u_i)| \leq M_r \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{k} |f(t_{i-1},u_i) - f(t_{i-1},u_{i-1})| \leq M_r.$$

W dalszej części tej pracy zauważa się (Lemma 4.1), że (dla dowolnej funkcji $x : [0,1] \to \mathbb{R}$), $F(x) \notin BV[0,1]$ wtedy i tylko wtedy gdy pewnego $t \in [0,1]$ oraz dla każdego $\alpha > 0$, wariacja funkcji $F(x)$ na przedziale o końcach $\max\{0, t-\alpha\}$ i $\min\{1, t+\alpha\}$ jest równa $+\infty$. Teraz dwa "techniczne" lematy, pozwalają uzyskać twierdzenie (Theorem 4.4), które, przy założeniu, ze $x \in B_{BV}(0,r)$

dla pewnego $r > 0$, daje warunki konieczne i dostateczne na to by $F(x) \in BV([0,1])$.

(Uwaga: W twierdzeniu tym litera "r" występuje w podwójnej roli.)

Po wprowadzeniu definicji: "flagged partition" (taflowego podziału) $V = \{(t_1, u_i) : i = 0, 1, ..., k\}$ zbioru $[a,b] \times A$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$; relacji kondensacji takich podziałów; ciągów kondensacyjne podziałów i właściwych ciągów kondensacyjnych $(V^n)_{n \in \mathbb{N}}$; formułuje się następujące twierdzenie (Theorem 4.6): *Operator F odwzorowuje $BV([0,1])$ w siebie wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $t \in [0,1]$, dla każdego $u \in R$ istnieją takie $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$, że dla każdego właściwego ciągu kondensacyjnego $(V^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $V^n = \{(t_i^n, u_i^n) : i = 0, 1, ..., k_n\}$ zbioru $[\max\{0, t-\varepsilon\}, \min\{1, t+\varepsilon\}] \times [u-\delta, u+\delta]$ zachodzi nierówność*

$$\sup_n \sum_{i=1}^{k_n} \left| f(t_i^n, u_i^n) - f\left(t_{i-1}^n, u_{i-1}^n\right) \right| < +\infty.$$

Jest to pełna charakteryzacja operatorów spełniających "acting conditions" w przestrzeni $BV([0,1])$ i jednocześnie rozwiązanie pierwszego problemu z monografii J. Appella. J. Banasia i N. Merentesa.

W drugiej pracy (wspólnej z P. Kasprzakiem) , część "Auxiliary results", oprócz szeregu nietrywialnych lematów o technicznym charakterze, zawiera warunki konieczne i dostateczne na to, aby operator superpozycji, nie będąc operatorem lokalnie ograniczonym, przekształcał $BV([0,1])$ w siebie (Theorem 3.4).

Wykorzystując te wyniki dowodzi się, że jeśli funkcja f generująca operator F odwzorowuje zbiory ograniczone w ograniczone, oraz $F(BV([0,1])) \subset BV([0,1])$, to operator F musi być lokalnie ograniczony (Theorem 4.1). Ten fakt wraz z Twierdzeniem 3.8 z poprzedniej pracy, *przy założeniu, że funkcja $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ generująca operator F odwzorowuje zbiory ograniczone w ograniczone*, prowadzą do wniosku, że *operator F generowany przez f odwzorowuje $BV[0,1]$ w siebie wtedy i tyko wtedy gdy spełniony jest warunek (b) Twierdzenia 3.8* z poprzedniej pracy (Theorem 4.3).

Wynik ten wraz z dyskusją o operatorach lokalnie ograniczonych i przykładami daje pełną odpowiedź na drugie pytanie postawione w monografii J. Appella. J. Banasia i N. Merentesa.

Trzecia z prac poświęcona jest zagadnieniu ciągłości rozważanego operatora. Najpierw, przy pomocy elementarnych środków, dowodzi się, że jeśli $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1, to generowany przez nią operator F jest jednostajnie ciągły na ograniczonych podzbiorach przestrzeni $BV[0,1]$. Dodajmy, ze jest to znaczące wzmocnienie wyniku Morse' a z 1937 roku, który dowodził ciągłości F, zakładając że $F(BV([0,1])) \subset BV([0,1])$. Ponadto, dowód Morse'a, mimo że korzysta z zaawansowanych środków, jest bardzo długi. Nietrywialny przykład pokazuje, że założenie regularnościowe o funkcji f nie może być zastąpione warunkiem Lipschitza. W szczególnym przypadku, gdy F jest operatorem autonomicznym, dla ciągłości F wystarcza lokalna lipschitzowskość generatora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Theorem 7). Pracę kończy twierdzenie (Theorem 10) charakteryzujące operatory ciągłe w przypadku nieautonomicznym.

Recenzowana rozprawa doktorska przynosi ważne i efektowne wyniki dotyczące operatorów superpozycji. Uzyskanie ich wymagało zdecydowanie przenikliwych przemyśleń, oryginalnych pomysłów, solidnego warsztatu naukowego oraz rzetelnego wkładu pracy. Wszystkie twierdzenia i lematy są interesujące a ich dowody są starannie opracowane. Na szczególną uwagę zasługują podane w pracy przykłady i kontrprzykłady. Rozprawa daje kompletne odpowiedzi na trzy podstawowe pytania postawione w monografii Appella. J. Banasia i N. Merentesa.

Konkludując stwierdzam, że **recenzowana rozprawa doktorska wypełnia (z nadmiarem) wymagania Ustawy z dnia 18 marca 2011 r. o zmianie ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki oraz zmianie niektórych innych ustaw (Dz. U. Nr 84, poz. 455) i wnoszę o dopuszczenie pana dra hab. Piotra Maćkowiaka do dalszych etapów przewodu doktorskiego z matematyki**.

Ponadto uważam, że **jest to rozprawa wyróżniająca się**.