Opinia o rozprawie doktorskiej
Agaty Panfil
zatytułowanej

Lokalna struktura geometryczna wybranych funkcyjnych przestrzeni Banacha.

Rozprawa doktorska magister Agaty Panfil dotyczy charakteryzacji geometrycznych własności sfery jednostkowej pewnych funkcyjnych przestrzeni Banacha. Tego typu badania są istotne ze względu na możliwość zasosowania tych własności w innych działach matematyki takich jak: teoria aproksymacji, teoria punktu stałego oraz teoria optymalizacji. Doktorantka koncentruje się głównie na badaniu monotonicznościowych własności lokalnych (tzn. takich które nie muszą być spełnione przez dowolny punkt ze sfery jednostkowej). Chodzi tu głównie o charakteryzację punktów dolnej monotoniczności (w skrócie LM punktów), górnej monotoniczności (w skrócie UM punktów), dolnej lokalnej jednostajnej monotoniczności (w skrocie LLUM punktów) oraz górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności (w skrocie ULUM punktów).

Recenzowana rozprawa składa się ze wstępu, trzech rozdziałów i bibliografii liczącej 67 pozycji.

Rozdział pierwszy zawiera podstawowe definicje potrzebne w dalszej części rozprawy. Znajdujemy tu między innymi definicję własności Fatou, punktu porządkowej ciągłosci, punktów dolnej i górnej monotonocznosci oraz punktów dolej i górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności. Orginalne rezultaty uzyskane przez doktorantkę znajdują się w drugim i trzecim rozdziale.

Główne wyniki rozdziału 2.1 to Twierdzenia 2.30, 2.31, 2.37 oraz Twierdzenie 2.40. Twierdzenie 2.30 charakteryzuje w symetrycznych, funkcyjnych przestrzeniach Banacha LM punkty ze stożka elementów nieujemnych. Mówi ono że x jest LM punktem wtedy i tylko wtedy gdy jego nierosnące przestawienie x^* jest LM punktem i zachodzi pewnien dodatkowy warunek (zob. str. 20 rozprawy). Kluczowe w dowodzie Tw. 2.30 są Lemat 3.2 z pracy A. Kamińskiej [39] (numeracja wedlug bibliografii doktoratu) oraz Lemat 2.27 wczesniej wykazany przez doktorantkę. Podobnej charakteryzacji w przypadku UM punktów) dostarcza Tw. 2.31. Dowód tego rezultatu opiera się również na wcześniej udowodnionym Lemacie 2.24 (por. Lemat 5 z pracy A. Kamińskiej [40]) i Lemacie 2.28. Twierdzenie 2.37 to charakteryzacja w symetrycznych, funkcyjnych przestrzeniach Banacha LLUM punktów. Jest ono motywowane Tw. 2.6 z pracy Foralewskiego i Kolwicza [26], które podaje "globalna" charakteryzację dolnie lokalnie jednostajnie monotonicznych symetrycznych funkcyjnych przestrzeni Banacha. Dowód opiera się na zastosowaniu Lematu 6 z pracy H. Hudzika i A. Narloch [37], Twierdzenia Helly'ego i wcześniej udowodnionych Twierdzenia 2.30 oraz Lematu 2.36. Podobnego typu charakteryzacja ULUM punktów jest przedstawiona w Twierdzeniu 2.40 i Wniosku 2.41.

Wyniki z rozdzialu 2.1 znajdują zastosowanie w Rozdziale 2.2 gdzie badane są monotonicznościowe własności punktów w przestrzeniach Lorentza $\Gamma_{p,w}$ i $\Lambda_{p,w}$. Najistotniejsze rezultaty tego podrozdziału to Twierdzenia 2.44, 2.45 i 2.47. W Twierdzeniu 2.44 podana jest charakteryzacja punktów porządkowej ciągłości w przestrzeniach $\Gamma_{p,w}$ i $\Lambda_{p,w}$. Dowód opiera się głównie na pewnym lemacie z ksiażki [56], którego

dowód dla wygody czytelnika został zamieszczony w doktoracie (zob. Lemat 2.32). Natomiast Twierdzenia 2.45 i 2.47 dotyczą charakteryzacji LM i UM punktów w przestrzeniach $\Gamma_{p,w}$ i $\Lambda_{p,w}$. Dowody tych twierdzeń bazują na Lematach 2.22, 2.24, 2.27, 2.28 oraz Twierdzeniach 2.30, 2.31 i 2.37 z rozdziału 2.1.
Wyniki z Rozdziału 2.2 znajdują zastosowanie w Rozdziale 2.3, dotyczącym lokalnej i globalnej struktury przestrzeni Orlicza-Lorentza $\Lambda_{\varphi,w}$. Wniosek 2.50 to charakteryzacja LM punktów ze stożka $\Lambda^+_{\varphi,w}$, w którego dowodzie wykorzystane jest Twierdzenie 2.45. Analogiczny wynik dla UM punktow to Wniosek 2.51, w którego dowodzie wykorzystane jest Twierdzenie 2.47. Ponadto Twierdzenie 2.37 jest tu zastosowane w dowodzie Wniosku 2.52 dotyczącego charakteryzacji LLUM punktow ze stożka $\Lambda^+_{\varphi,w}$. Wypada wspomnieć że z Wniosków 2.50, 2.51, 2.52 wynikają odpowiednie charakteryzacje dla przestrzeni Lorentza $\Lambda_{p,w}$. Natomiast Wnioski 2.54 i 2.55 dotyczą warunków równoważnych na dolną lokalną jednostajną monotoniczność i górną lokalną jednostajną monotoniczność przestrzeni $\Gamma_{p,w}$ i są konsekwencjami poprzednio udowodnionych rezultatów (Lematu 2.27, Twierdzenia 2.45 i Wniosku 2.49).
W Rozdziale 2.4 podana jest charakteryzacja punktów niekwadratowości (w skrócie NSQ punktów) przestrzeni $\Gamma_{p,w}$. Przypomnijmy że punkt x ze sfery jednostkowej przestrzeni Banacha X jest punktem niekwadratowości jeżeli $min\{\|x-y\|, \|x+y\|\} < 2$ dla wszystkich $y \in X$, $\|y\| = 1$. Twierdzenie 2.59 podaje warunek konieczny na bycie NSQ punktem w dowolnej, symetrycznej, funkcyjnej przestrzeni Banacha, a Twierdzenie 2.60 w przestrzeni $\Gamma_{p,w}$. Twierdzenia 2.61 i 2.63 podają pełną charakteryzację punktów NSQ w przestrzeni $\Gamma_{p,w}[0,\infty)$ w zależności od współczynników γ i β występujących we wzorze (18) na stronie 30-tej rozprawy. Twierdzenie 2.62 dotyczy charakteryzacji punktów NSQ w przestrzeni $\Gamma_{p,w}[0,1]$. W dowodach tych rezultatów wykorzystuje się między innymi wcześniej udowodnione Twierdzenia 2.45 i 2.47. Jako konsekwencje Twierdzeń 2.60 - 2.63 uzyskano pełną charakteryzację niekwadratowości przestrzeni $\Gamma_{p,w}$, (zob. Wnioskek 2.64) i przestrzeni $\Gamma_{p,w}[0,\infty)_a$, (elementów porządkowo ciagłych w $\Gamma_{p,w}$), (zob. Wniosek 2.65).
W Rozdziale 2.5 pokazane są zwiazki między UM, LM i LLUM punktami, a problemem zdominowanej najlepszej aproksymacji w podkratach domkniętych siatek Banacha. Lemat 2.67 podaje warunek wystarczający na bycie UM i LM punktem w dowolnej siatce Banacha w języku zdominowanej najlepszej aproksymacji. Przykład 2.68 pokazuje że jest to rzeczywiście tylko warunek wystarczający. Wniosek 2.70 to warunek wystarczający na bycie UM i LLUM punktem w symetrycznej funkcyjnej przestrzeni Banacha. Natomiast Lemat 2.71 podaje warunek konieczny (który wyraża się w języku zdominowanej najlepszej aproksymacji) na bycie UM i LM punktem w dowolnej siatce Banacha. Również Przykład 2.72 pokazuje że jest to tylko warunek konieczny.
Rozdział trzeci rozprawy dotyczy charakteryzacji punktów porządkowej ciągłości w uogólnionych przestrzeniach Calderóna - Łozanowskiego E_ϕ. Są to przestrzenie modularne z modularem generowanym przez przestrzeń Köthego E i funkcję Musielaka - Orlicza ϕ (zob. Def. 3.5, str. 68). W przypadku gdy funkcja ϕ nie zależy od parametru, są one szczególnym przypadkiem konstrukcji rozważanych wcześniej przez Calderóna i Łozanowskiego. Główny rezultat tego rozdziału to Twierdzenie 3.22 podające pełną charakteryzację punktów porządkowej ciągłości w uogólnionych przestrzeniach Calderóna - Łozanowskiego E_ϕ. Poprzedzone jest ono analizą

różnych wariantów warunku Δ_2 (zob. Definicja 3.7 - Lemat 3.20). Warunki uzyskane w Twierdzeniu 3.22 są skomplikowane (jedną z przyczyn jest fakt że przypadek bezatomowy i ciągowy są jednocześnie rozpatrywane), ale przy ich pomocy jako wnioski można otrzymać wcześniej udowodnione rezultaty dotyczące tego problemu. W szczególności konsekwencją Twierdzenia 3.22 jest Wniosek 3.24 dotyczący przestrzeni Calderóna - Łozanowskiego (funkcja ϕ nie zależy od parametru) udowodniony wcześniej w pracy [54]. Również konsekwencjami Twierdzenia 3.22 są Wnioski 3.28 i 3.29 charakteruzujące punkty porządkowej ciągłości w przestrzeniach Orlicza - Lorentza $\Lambda_{\varphi,w}$ i $\lambda_{\varphi,w}$.

Moim zdaniem, przedstawiona mi do oceny rozprawa doktorska prezentuje wysoki poziom merytoryczny. Dowody zawartych w niej twierdzeń są na ogół trudne technicznie. Najciekawsze (i moim zdaniem najtrudniejsze do udowodnienia) są wspomniane wyżej Twierdzenia 2.61, 2.62 i 2.63 dotyczące charakteryzacji punktów NSQ w przestrzeniach $\Gamma_{p,w}$. Doktorantka wykorzystuje w dowodach swoich rezultatów wyniki innych autorów (głównie prace [10], [20], [37], 40] autorstwa H. Hudzika, A. Kaminskiej, F. Sukocheva i współautorów). Bogata bibliografia zamieszczona w rozprawie świadczy o dobrej orientacji doktorantki dotyczącej geometrycznych własności funkcyjnych przestrzeni Banacha. Ponadto tematyka rozprawy nie jest "egzotyczna" i leży w kręgu zainteresowania wielu matematyków. Wypada wspomnieć że rezultaty przedstawione w rozprawie doktorskiej zostały już częściowo opublikowane (zob. prace [15], [51], [52], [53] - numeracja według bibliografii w doktoracie) i prace te już są cytowane (zob. [11], [16], [42]). Moim zdaniem, rozprawa doktorska jest również poprawnie zredagowana.

Biorąc pod uwagę wyżej wymienione argumenty stwierdzam, że rozprawa doktorska magister Agaty Panfil spełnia warunki ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki z dnia 14 marca 2003 roku. Zatem wnioskuję o dopuszczenie magister Agaty Panfil do dalszych etapów przewodu doktorskiego i o nadanie jej stopnia naukowego doktora nauk matematycznych.

Kraków, dnia 29 marca 2017 roku

Prof. dr hab. Grzegorz Lewicki
Profesor zwyczajny w Instytucie Matematyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie

Grzegorz Lewicki