dr hab. Maciej Ulas
Instytut Matematyki UJ
Łojasiewicza 6
30-348 Kraków
email: maciej.ulas@uj.edu.pl

Kraków, 21 maja 2018.

Recenzja rozprawy doktorskiej
Pani mgr Katarzyny E. Taczały pt. *Ramsey properties of the linear equations*

Przedmiotem niniejszej recenzji jest rozprawa doktorska *Ramsey properties of the linear equations* przygotowana przez Panią mgr. Katarzynę E. Taczałę. Promotorem pracy jest prof. dr. hab. Tomasz Schoen. Przedstawiona praca została napisana w języku angielskim i ma 46 stron. Składa się ze streszczenia, czterech rozdziałów oraz bibliografii liczącej 24 pozycje. Przejdę teraz do informacji o zawartości poszczególnych rozdziałów i oceny merytorycznej tych, które zawierają oryginalne wyniki Pani Taczały.

Rozdział 1 zawiera (bardzo) krótką informację o głównych wynikach i problemach addytywnej teorii Ramseya.

Rozdział 2 poświęcony jest wprowadzeniu podstawowych oznaczeń oraz metod, które wykorzystywane są w dalszej części pracy. Należy zauważyć, że chociaż przypomniane jest oznaczenie O (o duże), to nie przypomniano oznaczenia Ω (omega duże), które pojawia się, gdy jest mowa o trójkach Strausa.

W pracy rozważane są dwa (w zasadzie niezależne) zagadnienia dotyczące własności typu Ramseya. Dokładniej, w Rozdziale 3 bada się hipotezę sformułowaną przez Foxa i Kleimana dotyczącą stopnia regularności liniowego równania diofantycznego postaci

$$x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n + b, \tag{1}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}_+$, $b \in \mathbb{N}_+$ jest ustalone i interesują nas rozwiązania w liczba naturalnych. Równanie to jest naturalnym uogólnieniem jednorodnego równania liniowego rozważanego przez Rado i jego następców.

Przypomnijmy, że Fox i Kleitman skonstruowali $2n$ kolorowanie zbioru liczba naturalnych, które umożliwiło pokazanie, że równanie (1) nie jest $2n$-regularne dla każdego b. Jednocześnie, sformułowali oni hipotezę mówiącą, że istnieje taka liczba $b \in \mathbb{N}_+$, że równanie (1) jest $(2n-1)$-regularne (Conjecture 2 w pracy: J. Fox, D. J. Kleitman, *On Rado's Boundedness Conjecture*, J. Comb. Theory Ser. A 113 (2006), 84–100). Pani Taczała, we wspólnej pracy z promotorem, potwierdza tę hipotezę dowodząc, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ istnieje takie $b = b_n \in \mathbb{N}_+$, że dostatecznie dużych N, każde $(2n-1)$-kolorowanie zbioru $\{1, \ldots, N\}$ zadaje monochromatyczne rozwiązanie równania (1) (Theorem 3.6 w pracy). Głównym narzędziem służącym do dowodu wspomnianego twierdzenia jest uogólnienie rezultatu Eberharda, Greena i Mannersa na przypadek sumy k egzemplarzy zbioru $A \subset \{1, \ldots, N\}$ (Theorem 3.4 w pracy). Dowód tego rezultatu jest skomplikowany i wymaga dużej sprawności w operowaniu metodami kombinatoryki addytywnej. Choć sama idea dowodu jest zbliżona do tej z pracy Eberharda, Greena i Mannersa, to wymaga pokonania sporych trudności technicznych (dowód jednego z kluczowych lematów (Lemma 3.15) ma ponad 4 strony). W mojej opinii, oryginalne rezultaty otrzymane w Rozdziale 3, stanowią wartościowy dodatek do istniejącej wiedzy o regularności równań liniowych. W kontekście otrzymanych wyników powstaje również interesujące pytanie:

czy możliwym jest otrzymanie jawnej numerycznej postaci stałej $b = b_n$, dla której równanie (1) jest $(2n-1)$-regularne?

Rozdział 4 jest poświęcony monochromatycznym rozwiązaniom równania

$$x_1 + \ldots + x_{n-1} = x_n, \tag{2}$$

gdzie zakładamy, że elementy $x_1, \ldots, x_n$ są elementami grupy reszt modulo N. Dokładniej, jeśli $\mathbb{Z}_N = R \cup B$ jest podziałem, to dwa główne wyniki tego rozdziału zawierają się w dwóch twierdzeniach (Theorem 4.1 i Theorem 4.2). Jeśli przez μ_n oznaczymy minimalną liczbę rozwiązań monochromatycznych równania (2) w $\mathbb{Z}_N$, to pierwsze twierdzenie daje dolne oszacowanie liczby μ_{2n}, zaś drugie zawiera górne oszacowanie tej liczby w przypadku, gdy N jest liczbą pierwszą. Oszacowanie na liczbę μ_{2n+1} jest istotnie łatwiejsze do uzyskania i zostało otrzymane przez Datskovsky'ego. Dowody opierają się na analizie wyrażenia $S_{2n}(R, B)$ zliczającego monochromatyczne rozwiązania równania (2) dla pewnych szczególnych kolorowań R, B. Idea jest bardzo prosta: standardowe zastosowanie analizy fourierowskiej umożliwia podanie jawnych wzorów na $S_{2n}(R, B)$. Niestety, otrzymane wyrażenia są dane przez skomplikowane sumy trygonometryczne i problem otrzymania pożądanych oszacowań jest delikatny. W przypadku górnego oszacowania dowód jest zależny od parzystości N i drobiazgowej analizy współczynników występujących w rozważanych sumach. To podejście umożliwia uzyskanie nietrywialnego oszacowania liczby $S_{2n}(R, B)$. W dowodzie dolnego oszacowania istotnym założeniem jest pierwszość liczby N. Jest to konsekwencja zastosowanej metody dowodowej, która opiera się na lemacie Greena. Lemat ten daje oszacowanie na wielkość współczynników Fouriera skojarzonych z podzbiorem $\mathbb{Z}_N$. W tym miejscu ciekawym jest następujące pytanie: czy możliwym jest uzyskanie dobrego oszacowania dolnego bez założenia pierwszości liczby N? Drugie pytanie, które się nasuwa dotyczy dokonanego wyboru kolorowań, które wykorzystuje się w celu uzyskania oszacowań dolnych. Dokładniej: czy wybór bardziej skomplikowanych podziałów $\mathbb{Z}_N$ prowadzi do lepszych oszacowań?

Nie mam zarzutów do części merytorycznej pracy, ale jej strona redakcyjna jest daleka od doskonałości. Przykładowo, w Rozdziale 3, w wielu zdaniach, w których występują wyśrodkowane wyrażenia brakuje kropek lub przecinków (wymienię tylko kilka: na str. 17 brak kropek po sformułowaniu Lematu 3.10 i w ostatniej linia; str. 18, brak kropki w linii 11; str. 19, brak kropki w linii 5, i przecinków w liniach 10, 13, i wiele innych, których już nie będę wymieniał). Ponadto w wielu miejscach tego rozdziału wyśrodkowane wyrażenia wychodzą poza marginesy. Co ciekawe, liczba analogicznych usterek w pozostałych rozdziałach jest znikoma. W pracy nie udało się również uniknąć problemów z przedimkami angielskimi, które są standardowym źródłem błędów w angielskich tekstach polskich autorów (i prace recenzenta nie są tutaj wyjątkiem). W szczególności, w wielu miejscach ich brakuje lub są niepotrzebne. Najbardziej rażący przykład, to wystąpienie przedimka *the* w tytule pracy. Wygląda to tak, jakby ostateczna wersja pracy była przygotowywana w pośpiechu. Drobiazgi te nie wpływają jednak na czytelność pracy.

Moje uwagi krytyczne dotyczące redakcji nie wpływają na pozytywną ocenę pracy. Jednakże, na zawarte w piśmie Pana Dziekana WMiI UAM pytanie, czy uznaję pracę za wyróżniającą odpowiedź brzmi nie. Praca zawiera interesujące i nietrywialne wyniki, ale nie są to rezultaty, które można by uznać za nadzwyczajne. Podkreślam jednak, że uważam wyniki zawarte w pracy za wartościowe i w jasny sposób potwierdzające opanowanie i biegłość w stosowaniu metod addytywnej teorii Ramseya przez Panią Taczałę.

Podsumowując: uważam, że przedstawiona rozprawa spełnia wszelkie ustawowe (por. art. 13 ust. 1 Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym) i zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie Pani mgr Katarzyny E. Taczały do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Maciej Ulas