Załącznik 2 (wersja polska)

Autoreferat

1. Imię i Nazwisko: Łukasz Pańkowski.

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/artystyczne — z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej.

magister Matematyki (2005) Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, Poznań

magister Informatyki (2006) Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, Poznań

doktor nauk matematycznych (2009) Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, Poznań, rozprawa „Twierdzenia o uniwersalności a twierdzenie Kroneckera o aproksymacjach diofantycznych", promotor: prof. dr hab. J. Kaczorowski

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych.

adiunkt od 2009r., Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, Poznań

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.):

a) tytuł osiągnięcia naukowego:

Rozmieszczenie wartości funkcji typu dzeta i funkcji typu L.

b) (autor/autorzy, tytuł/tytuły publikacji, rok wydania, nazwa wydawnictwa)

[H1] Ł. Pańkowski, J. Steuding, *Extreme values of L-functions from the Selberg class*, Int. J. Number Theory **9** (2013), no. 5, 1113–1124.

[H2] Ł. Pańkowski, *Joint universality and generalized strong recurrence with rational parameter*, J. Number Theory **163** (2016), 61–74.

[H3] C. Aistleitner, Ł. Pańkowski, *Large values of L-functions from the Selberg class*, J. Math. Anal. Appl. **446** (2017), no. 1, 345–364.

[H4] Y. Lee, T. Nakamura, Ł. Pańkowski, *Joint universality for Lerch zeta-functions*, J. Math. Soc. Japan **69** (2017), no. 1, 153–161.

[H5] T. Nakamura, Ł. Pańkowski, *Effective version of self-approximation for the Riemann zeta function*, Math. Nachr. **290** (2017), no. 2-3, 401–414.

[H6] Y. Lee, T. Nakamura, Ł. Pańkowski, *Selberg's orthonormality conjecture and joint universality of L-functions*, Math. Z. (2017), 1–18, `http://dx.doi.org/10.1007/s00209-016-1754-2`.

[H7] Ł. Pańkowski, *Joint universality of dependent L-functions*, Ramanujan J. (2017), 1–15, `http://dx.doi.org/10.1007/s11139-017-9886-5`.

c) omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników.

Wprowadzenie

Zasadniczym celem omawianych prac było uzyskanie informacji o funkcjach dzeta i funkcjach typu L, które jako ważne uogólnienia klasycznej funkcji dzeta Riemanna odgrywają kluczową rolę w analitycznej teorii liczb oraz w badaniu wielu obiektów arytmetycznych i algebraicznych. W literaturze istnieje wiele klas funkcji obejmujących wiele znanych i ważnych funkcji typu L. Jedną z nich jest klasa zdefiniowana przez A. Selberga [48] w roku 1989, która zawiera (przy założeniu odpowiednich znanych hipotez) wszystkie funkcje typu L ważne w analitycznej teorii liczb. Mianowicie klasa Selberga $\mathcal{S}$ składa się z funkcji zdefiniowanych w półpłaszczyźnie $\sigma := \mathrm{Re}(s) > 1$ jako szereg Dirichleta postaci $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$ ($a(n) \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$), która spełnia następujące warunki:

(i) (warunek Ramanujana) $a(n) \ll n^{\varepsilon}$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$;

(ii) (przedłużenie analityczne) $(s-1)^m L(s)$ jest funkcją analityczną skończonego rzędu dla pewnego całkowitego $m \geqslant 0$;

(iii) (równanie funkcyjne) $L(s)$ spełnia następujące równanie funkcyjne

$$\Lambda(s) = \omega\overline{\Lambda(1-\overline{s})},$$

gdzie

$$\Lambda(s) := L(s)Q^s \prod_{j=1}^{k} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j),$$

$Q, \lambda_j \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in \mathbb{C}$ takie, że $|\omega| = 1$ oraz $\mu_j \in \mathbb{C}$ spełniają nierówności $\operatorname{Re}\mu_j \geqslant 0$;

(iv) (iloczyn Eulera) istnieje ciąg liczb zespolonych $b(n)$ taki, że

$$\log L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s} \qquad (\sigma > 1),$$

$b(n) = 0$ dla n niebędących potęgami liczb pierwszych oraz $b(n) \ll n^{\theta}$ dla pewnego $\theta < 1/2$.

Jednym z motywów wprowadzenia klasy Selberga było objęcie jak najszerszego zbioru funkcji, dla których można przypuszczać, że prawdziwa jest hipoteza Riemanna. Hipoteza ta jest jednym z najważniejszych problemów otwartych współczesnej matematyki i postuluje, że funkcja L nie posiada miejsc zerowych o części rzeczywistej większej od $1/2$. Najprostszym przykładem funkcji należącej do $\mathcal{S}$ jest oczywiście klasyczna funkcja dzeta Riemanna zdefiniowana szeregiem $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ dla $\sigma > 1$. Innymi ważnymi przykładami funkcji z klasy Selberga są funkcje L Dirichleta, gdzie rolę współczynników $a(n)$ grają wartości pierwotnego charakteru Dirichleta $\chi(n)$. Są to funkcje stopnia 1, czyli funkcje, dla których wielkość $d_L = 2\sum_{j=1}^{k} \lambda_j$, zwana stopniem funkcji L, wynosi 1. Co więcej, jak pokazali Kaczorowski i Perelli [21], każda funkcja stopnia 1 w $\mathcal{S}$ jest, z dokładnością do przesunięcia argumentu, jedną z funkcji L Dirichleta. Innymi ważnymi przykładami elementów klasy Selberga są funkcje dzeta Dedekinda związane z algebraicznymi rozszerzeniami ciała liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, funkcje L Artina dla nieprzywiedlnych reprezentacji grup Galois ciał liczbowych (o ile spełniona jest hipoteza Artina dotycząca holomorficzności tej funkcji) oraz funkcje L związane z pewnymi formami automorficznymi (przy założeniu odpowiednich znanych hipotez).

Jak się okazuje (zob. [19]) warunkiem koniecznym dla oczekiwania prawdziwości odpowiednika hipotezy Riemanna dla danej funkcji L z klasy Selberga jest warunek (iv), czyli istnienie iloczynu Eulera. Warunek ten implikuje również, że współczynniki $a(n)$ szeregu Dirichleta definiującego daną funkcję $L \in \mathcal{S}$ są multiplikatywne, czyli

$$L(s) = \prod_{p} L_p(s) \qquad (\sigma > 1),$$

gdzie iloczyn przebiega wszystkie liczby pierwsze oraz $L_p(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a(p^k)p^{-ks}$. Co więcej, znane przykłady funkcji L z klasy $\mathcal{S}$ w rzeczywistości spełniają nieco silniejszy warunek, który mówi, że $1/L_p(s)$ jest wielomianem zmiennej p^{-s}, którego stopień nie zależy od p. W związku z tym, w wielu przypadkach, zamiast warunku (iv), możemy wymagać spełniania następującego warunku:

(iv') (wielomianowy iloczyn Eulera) dla $\sigma > 1$ i odpowiednich liczb zespolonych $\alpha_j(p)$ mamy

$$L(s) = \prod_p \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{\alpha_j(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

W związku z tym, klasę $\mathcal{S}_{\mathrm{poly}}$ funkcji zadanych szeregiem Dirichleta (jak w przypadku klasy $\mathcal{S}$) spełniających warunki (i)-(iii) i (iv') będziemy nazywali klasą Selberga z wielomianowym iloczynem Eulera. Warto tutaj wspomnieć, że z warunku (iv') łatwo wynika (zob. [51, Lemma 2.2]), że warunek Ramanujana jest równoważny nierówności $|\alpha_j(p)| \leqslant 1$ dla $j = 1, 2, \ldots, m$ i dowolnej liczby pierwszej p. Co więcej, można pokazać, że $|a(p)| \leqslant m$ dla dowolnej liczby pierwszej p.

Inną ważną klasą uogólnień funkcji dzeta Riemanna $\zeta(s)$, będącą obiektem badawczym omawianego celu naukowego, są funkcje dzeta typu Hurwitza. Najprostszą z nich jest klasyczna funkcja dzeta Hurwitza $\zeta(s;\alpha)$ zdefiniowana za pomocą szeregu Dirichleta $\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)^{-s}$ dla $\sigma > 1$ i $\alpha \in (0,1]$. Łatwo zauważyć, że

$$\zeta(s;1) = \zeta(s), \qquad \zeta\left(s;\frac{1}{2}\right) = (2^s - 1)\,\zeta(s),$$

oraz

$$\zeta\left(s;\frac{a}{q}\right) = \frac{q^s}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi}(a) L(s,\chi),$$

gdzie suma przebiega po wszystkich charakterach o module q a $L(s,\chi)$ oznacza funkcje L Dirichleta.

Innym ważnym uogólnieniem tego typu jest funkcja dzeta Lercha rozważana niezależnie przez Lipschitza [33] i Lercha [32]. Funkcja ta zadana jest przez szereg Dirichleta postaci

$$L(s;\alpha,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(2\pi i \lambda n)}{(n+\alpha)^s} \qquad (\sigma > 1),$$

gdzie $0 < \alpha, \lambda \leqslant 1$. Oczywiście $L(s;\alpha,1) = \zeta(s;\alpha)$. Jak się okazuje własności analityczne funkcji dzeta Lercha dla $\lambda \neq 1$ są inne niż w przypadku funkcji dzeta Hurwitza. Mianowicie, funkcja dzeta Hurwitza posiada przedłużenie analityczne na całą płaszczyznę zespoloną $\mathbb{C}$ z wyjątkiem bieguna prostego w punkcie $s = 1$

o reziduum 1. Natomiast funkcję dzeta Lercha dla $\lambda \neq 1$ można przedłużyć do funkcji analitycznej na $\mathbb{C}$. Co więcej, podobnie do funkcji dzeta Riemanna, funkcja dzeta Lercha spełnia pewne równanie funkcyjne pokazujące symetrię jej wartości względem prostej $s = 1/2 + it$. Jednak, poza przypadkiem, gdy funkcja dzeta Lercha sprowadza się do funkcji dzeta Riemanna, nie możemy oczekiwać istnienia dla niej odpowiednika iloczynu Eulera, co powoduje szereg ciekawych własności tej funkcji odróżniających ją od funkcji dzeta Riemanna. Jedną z nich, jest istnienie nieskończenie wielu miejsc zerowych funkcji $\zeta(s;\alpha)$ na prawo od prostej krytycznej $s = 1/2 + it$, o ile $\alpha \neq 1/2, 1$.

Łączna uniwersalność

Badanie rozmieszczenia wartości funkcji typu L odgrywa centralną rolę we współczesnej analitycznej teorii liczb. W szczególności, problem rozmieszczenia miejsc zerowych funkcji dzeta Riemanna i ich związek z rozmieszczeniem liczb pierwszych był główną motywacją dla zastosowania metod analitycznych w teorii liczb. Funkcja dzeta Riemanna oraz jej uogólnienia posiadają, oprócz wciąż tajemniczego zachowania się zbioru ich miejsc zerowych, szereg zaskakujących własności dotyczących zachowania się ich wartości. Jak zauważyli Bohr i Courant [7], dla dowolnego $\sigma \in (1/2, 1)$ wartości funkcji dzeta Riemanna na prostej $\sigma + it$, $t \in \mathbb{R}$, tworzą zbiór gęsty w $\mathbb{C}$. Następnie wynik ten został poprawiony przez Bohra i Jessena [8, 9]. Pokazali oni, że dla dowolnego prostokąta $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{C}$ i dowolnego $\sigma > 1/2$ istnieje granica

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \{t \in [0, T] : s = \sigma + it \in \mathcal{G},\ \log \zeta(s) \in \mathcal{R}\},$$

gdzie $\operatorname{meas}(\cdots)$ oznacza rzeczywistą miarę Lebesgue'a a zbiór $\mathcal{G}$ powstaje poprzez usunięcie z półpłaszczyzny $\sigma > 1/2$ wszystkich odcinków postaci $\{\sigma + it : 1/2 < \sigma < \beta,\ t = \gamma\}$ dla każdego możliwego zera $\rho = \beta + i\gamma$ funkcji $\zeta(s)$ w tej półpłaszczyźnie.

Badania Bohra i jego współpracowników z pewnością były inspiracją dla Voronina [53], który udowodnił jedną z najciekawszych własności funkcji dzeta Riemanna tzw. twierdzenie o uniwersalności, które w nieco silniejszej formie (zob. [2, 43]) mówi, że dla dowolnej funkcji $f(s)$ ciągłej i nieznikającej na zbiorze zwartym $K \subset D := \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \operatorname{Re}(s) < 1\}$ o spójnym dopełnieniu oraz analitycznej we wnętrzu K, zachodzi nierówność

$$\forall_{\varepsilon>0} \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \max_{s\in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Obecnie wiadomo, że własność uniwersalności w sensie Voronina (niekoniecznie w całym pasie $1/2 < \sigma < 1$) spełniona jest dla wielu funkcji typu L, takich jak:

funkcja L Dirichleta (Voronin [53]), funkcja dzeta Dedekinda (Reich [44]), funkcja L Artina (Bauer [6]), funkcje L związane z formami parabolicznymi (Laurinčikas, Matsumoto i Steuding [22, 30, 31]). Dosyć ogólną klasę funkcji L o wielomianowym iloczynie Eulera, dla których można udowodnić twierdzenie o uniwersalności w sensie Voronina, zbadał Steuding w [51]. Natomiast uniwersalność ogólnych funkcji L z klasy Selberga $\mathcal{S}$ została udowodniona w pasie $1 - 1/d_L < \sigma < 1$ przez Nagoshi'ego i Steudinga w pracy [37]. Jak się okazuje, konieczne jest w tym celu założenie, że dana funkcja L zadana szeregiem Dirichleta o współczynnikach $a(n)$ spełnia pewnego rodzaju analog twierdzenia o liczbach pierwszych tj.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p\leqslant x} |a(p)|^2 = \kappa, \tag{1}$$

dla pewnej stałej $\kappa > 0$ zależnej od L, gdzie $\pi(x)$ liczy liczbę liczb pierwszych $p \leqslant x$.

Ograniczenie jedynie do uniwersalności w nieco węższym pasie $1 - 1/d_L < \sigma < 1$ związane jest z najlepszym znanym oszacowaniem średniej kwadratowej dla funkcji L na dowolnej prostej pionowej leżącej wewnątrz danego pasa. Problem wyznaczenia jak najszerszego pasa, w którym $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |L(\sigma+it)|^2 dt \ll 1$, jest wciąż otwartym zagadnieniem dla wielu znanych funkcji L z klasy Selberga. Natomiast najsilniejsze twierdzenie dla ogólnych funkcji L z klasy $\mathcal{S}$ można uzyskać z twierdzenia Pottera [42] (zob. [51, Corollary 6.11]) pokazując, że dla $\sigma > \max\{\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{d_L}\}$ mamy

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |L(\sigma+it)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_L(n)|^2}{n^{2\sigma}} < \infty. \tag{2}$$

Zatem twierdzenie Nagoshiego i Steudinga pozostaje prawdziwe w pasie $\sigma_{\mathrm{m}}(L) < \sigma < 1$, gdzie $\sigma_{\mathrm{m}}(L)$ oznacza infimum po wszystkich $\sigma \geqslant 1/2$ spełniających (2).

Voronin [54] udowodnił również tzw. twierdzenie o łącznej uniwersalności dla funkcji L Dirichleta związanych z parami nierównoważnymi charakterami Dirichleta. Krótko mówiąc, udowodnił on, że dowolna kolekcja funkcji $f_1(s), \ldots, f_n(s)$ ciągłych i nieznikających na zbiorze zwartym $K \subset D$ o spójnym dopełnieniu, analitycznych we wnętrzu K, może zostać przybliżona z dowolną dokładnością przez przesunięcia postaci $L(s+it, \chi_1), \ldots, L(s+it, \chi_n)$, gdzie $\chi_1, \ldots, \chi_n$ są parami nierównoważnymi charakterami Dirichleta. W dowodzie tego twierdzenia kluczową rolę odgrywa okresowość i ortogonalność charakterów. Innymi znanymi przykładami funkcji L łącznie uniwersalnymi są, między innymi, funkcje L Artina związane z parami niezależnymi charakterami (Bauer [6]) lub sploty funkcji L z klasy Selberga (spełniającej warunek (1)) z parami nierównoważnymi charakterami Dirichleta [51, Theorem 12.8], czyli funkcje zadane szeregami postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)\chi_j(n)}{n^s}$ dla charakterów $\chi_1, \ldots, \chi_n$. Jak jednak można łatwo zauważyć, łączna uniwersalność znanych przykładów funkcji L silnie bazuje na okresowości ich współczynników. Dlatego też Steuding w [51, Chapter 12] postawił hipotezę mówiącą, że okresowość współczynników nie jest konieczna, a jedynie wystarczy wymagać od współczynników następującej hipotezy Selberga o ortogonalności

Hipoteza (Selberg)**.** *Dla dowolnej funkcji* $1 \neq L \in \mathcal{S}$ *(*$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$*)* *istnieje liczba naturalna* κ_L *taka, że*

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{|a(p)|^2}{p} = \kappa_L \log\log x + R(x) \tag{3}$$

oraz, dla dwóch różnych pierwotnych funkcji $L_1, L_2 \in \mathcal{S}$ *(*$(L_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_j(n)n^{-s})$*), mamy*

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{a_1(p)\overline{a_2(p)}}{p} = R(x), \tag{4}$$

gdzie $R(x) \ll 1$.

Oczywiście, aby oczekiwać łącznej uniwersalności od dwóch funkcji L, konieczna jest pewnego rodzaju ich niezależność. W tym celu zakładanie hipotezy Selberga wydaje się być naturalnym wyborem, co w pewnym stopniu potwierdzili Bombieri i Hejhal [10], którzy pokazali, że dwie funkcje L spełniające nieco silniejszą hipotezę Selberga są w pewnym sensie statystycznie niezależne. Wiadomo jednak [40, Example 7.5], że hipoteza Selberga z $R(x) \ll 1$ nie jest wystarczająca do pokazania łącznej uniwersalności, gdyż funkcje $L(s, \chi)$ i $L(s - i, \chi)$ nie mogą być łącznie uniwersalne, pomimo, że

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\chi(p)\overline{\chi(p)p^{-i}}}{p} = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ \chi(p) \neq 0}} p^{i-1} \ll 1.$$

W związku z tym, w celu udowodnienia twierdzenia o łącznej uniwersalności dla funkcji $L_1, \ldots, L_m \in \mathcal{S}$ o współczynnikach Dirichleta $a_1(n), \ldots, a_m(n)$, odpowiednio, będziemy potrzebowali następującego silniejszego odpowiednika hipotezy Selberga:

$$\sum_{p \leqslant x} |a_{L_k}(p)|^2 = \sum_{j=1}^{2m+1} \frac{c_j^{(k)} x}{(\log x)^j} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{2m+2}}\right) \qquad (1 \leqslant k \leqslant m), \tag{5}$$

oraz

$$\sum_{p \leqslant x} a_{L_k}(p)\overline{a_{L_l}(p)} = \sum_{j=2}^{2m+1} \frac{c_j^{(k,l)} x}{(\log x)^j} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{2m+2}}\right) \qquad (1 \leqslant k \neq l \leqslant m), \tag{6}$$

gdzie $c_j^{(k)}, c_j^{(k,l)}$ są pewnymi stałymi oraz $c_1^{(k)} > 0$.

Pomimo tego, że powyższe założenia są silniejsze niż oryginalna hipoteza Selberga, jest wysoce prawdopodobne, że nie wykluczają one żadnych znaczących przykładów funkcji typu L. Można podać wiele przykładów funkcji L związanych z formami automorficznymi, dla których spełnione są powyższe tożsamości nawet z dokładniejszym członem głównym i lepszym oszacowaniem członu resztowego (porównywalnym z obecnie znanym oszacowaniem członu resztowego w twierdzeniu o liczbach pierwszych). Uniwersalność dwóch automorficznych funkcji L spełniających silną hipotezę Selberga i posiadających rzeczywiste współczynniki Dirichleta, została rozstrzygnięta pozytywnie przez Mishou [35], co daje częściową odpowiedź na hipotezę Steudinga. O ile metodę zaproponowaną przez Mishou można ulepszyć tak, aby obejmowała ona przypadek nierzeczywistych współczynników Dirichleta, wydaje się niemożliwe rozszerzenie jej na przypadek dowolnej liczby funkcji L.

W pracy [H6] wspólnej z Y. Lee i T. Nakamurą, zbadaliśmy zagadnienie łącznej uniwersalności dowolnej liczby funkcji $L_1, \ldots, L_m \in \mathcal{S}$ o niekoniecznie rzeczywistych współczynnikach. Udowodniliśmy następujące twierdzenie, które w zupełności odpowiada na pytanie postawione przez Steudinga dotyczące łącznej uniwersalności funkcji z klasy Selberga.

Twierdzenie 1 ([H6, Theorem 1.2])**.** *Niech $L_1, \ldots, L_m$ będą elementami klasy Selberga $\mathcal{S}$, $K_1, \ldots, K_m \subset \{s \in \mathbb{C} : \max_{j=1,2,\ldots,m} \sigma_{\mathrm{m}}(L_j) < \operatorname{Re} s < 1\}$ zbiorami zwartymi o spójnym dopełnieniu oraz f_j, $j = 1, \ldots, m$ funkcjami ciągłymi i nieznikającymi na K_j, analitycznymi we wnętrzu K_j. Wówczas, dla dowolnego $\varepsilon > 0$, o ile zachodzą warunki* (5) *i* (6)*, mamy*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \max_{j=1,\ldots,m} \max_{s \in K_j} |L_j(s + i\tau) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Główna idea dowodu bazuje w pewnym stopniu na oryginalnym dowodzie Voronina i jego probabilistycznym wariancie zaproponowanym przez Bagchiego [2]. Jednak dowód kluczowego kroku tzw. lematu gęstościowego (zob. [H6, Proposition 2.1]) wymagał nowego podejścia, który w istotny sposób wykorzystuje silniejszą postać hipotezy Selberga zamiast okresowości współczynników. W tym celu rozważa się sumy postaci $\sum_p |a_1(p)\Delta_1(\log p) + \cdots + a_m(p)\Delta_m(\log p)|^2$, gdzie suma przebiega po wszystkich liczbach pierwszych z przedziału postaci $[e^x, e^{x+B/x^2}]$ oraz funkcję

$$\Delta_j(z) = \iint_U e^{-sz}\overline{f_j(s)} d\sigma dt \tag{7}$$

dla odpowiedniego zbioru U zależnego od $K_1, \ldots, K_m$. Rozważania dotyczące sum tego typu wymagały udowodnienia technicznego, lecz kluczowego rezultatu dotyczącego zachowania się funkcji typu $\Delta_j(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, w pewnych krótkich przedziałach (zob. [H6, Lemma 2.6]).

Warto tutaj wspomnieć, że opracowana metoda obejmuje wszystkie znane przykłady funkcji typu L, dla których znane jest twierdzenie o łącznej uniwersalności. Dla przykładu można tutaj przytoczyć łączną uniwersalność tzw. okresowych funkcji dzeta (zob. [25]), której dowód, zaprezentowany przez A. Laurinčikasa i R. Matsaitenė, bezpośrednio nie korzysta z ortogonalności współczynników i nie jest oczywisty jego związek z Twierdzeniem 1. Mianowicie pokazali oni, że dla okresowych i multiplikatywnych ciągów $\mathfrak{A}_j = \{a_{jn}\}_{n=1}^{\infty}$, $1 \leqslant j \leqslant m$ o okresie k_j takich, że rząd macierzy $A = (a_{jl})_{j,l}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant l \leqslant k := \mathrm{NWW}(k_1, \ldots, k_m)$, $\mathrm{NWD}(l, k) = 1$ wynosi m, funkcje $\zeta(s; \mathfrak{A}_j) = \sum_{n \geqslant 1} a_{jn} n^{-s}$ są łącznie uniwersalne w sensie Voronina. Założenie o rzędzie macierzy A można rozumieć jako liniową niezależność ich wierszy, a zatem stosując ortogonalizację Gramma–Schmidta możemy zastąpić tę macierz systemem ortogonalnym (b_{jl}). Co więcej, łatwo można zauważyć, że łączna uniwersalność tych funkcji jest ściśle związana ze spełnianiem wspomnianego lematu gęstościowego przez odpowiednie sumy częściowe szeregu formalnego postaci $\sum_p a_{jp} p^{-s}$. Sumy te dadzą się w łatwy sposób zapisać jako liniowe kombinacje sum częściowych szeregu formalnego $\sum_p b_{jp} p^{-s}$, którego współczynniki spełniają już warunek Selberga o ortogonalności. Zatem stosując metodę opracowaną w pracy [H6] możemy udowodnić dla nich odpowiedni lemat gęstościowy. W konsekwencji prowadzi to do odpowiedniego lematu gęstościowego dla sum związanych ze współczynnikami a_{jp} oraz twierdzenia o łącznej uniwersalności funkcji $\zeta(s; \mathfrak{A}_j)$.

Co więcej, technika dowodowa opracowana w pracy [H6] może zostać zastosowana (zob. [H4]) również do zbadania łącznej uniwersalności dla funkcji dzeta typu Hurwitza, których niezależność związana jest z niezależnością współczynników w rozwinięciu w szereg Dirichleta. Wiadomo (zob. [2, 16]), że funkcja Hurwitza $\zeta(s; \alpha)$ jest silnie uniwersalna dla dowolnego przystępnego α i dowolnego wymiernego $\alpha \neq 1/2, 1$, gdzie silna uniwersalności oznacza, że również funkcje posiadające zera na zbiorze K mogą być przybliżane, w sensie Voronina, przez przesunięcia postaci $\zeta(s + it; \alpha)$. Laurinčikas [23] uogólnił ten wynik na przypadek funkcji dzeta Lercha $L(s; \alpha, \lambda)$ dla dowolnego λ i dowolnego przystępnego α. Dla funkcji dzeta Lercha możemy wyróżnić dwa rodzaje twierdzeń o łącznej uniwersalności. Pierwsze z nich dotyczą łącznej uniwersalności funkcji $L(s; \alpha_1, \lambda_1), \ldots, L(s; \alpha_m, \lambda_m)$, gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ są dowolnymi liczbami algebraicznie niezależnymi. Zagadnienie, to zostało początkowo zbadane przez Laurinčikasa i Matsumoto w pracach [26, 28, 29], a następnie pokazane w pełnej ogólności dla dowolnych λ_j i algebraicznie niezależnych α_j przez Nakamurę w [39].

Drugi rodzaj twierdzeń o łącznej uniwersalności funkcji dzeta Lercha dotyczy przypadku, gdy $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \alpha$ oraz α jest dowolną liczbą przystępną. W tym przypadku, niezależność funkcji dzeta Lercha jest konsekwencją niezależności parametrów $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Pierwsze wyniki w tym kierunku zostały uzyskane przez

Laurinčikasa i Matsumoto [27, Theorem 1], którzy udowodnili twierdzenie o łącznej silnej uniwersalności funkcji $L(s;\alpha,\lambda_1),\ldots,L(s;\alpha,\lambda_m)$ dla α przystępnego i różnych $\lambda_j = k_j/l_j$ spełniających $(k_j,l_j)=1$ i $0<k_j\leqslant l_j$. Wynik ten został nieco uogólniono przez Nakamurę [38, Theorem 17] do przypadku $\lambda_j = \lambda + k_j/l_j$, gdzie $\lambda\in(0,1]$ oraz λ_j są rózne modulo 1. Jak można zauważyć, w obu przypadkach dosyć kluczową rolę odgrywa okresowość współczynników postaci $\exp(2\pi i n k_j/l_j)$. Zaznaczmy tutaj, że wspomniane twierdzenie Nakamury można traktować jako splot funkcji Lercha $L(s;\alpha,\lambda)$ ze współczynnikami $\exp(2\pi i n k_j/l_j)$.

Znaczący postęp w tym kierunku uzyskał Mishou w pracy [34]. Pokazał on, że funkcje $L(s;\alpha,\lambda_1),\ldots,L(s;\alpha,\lambda_m)$ są łącznie silnie uniwersalne dla przystępnego α i prawie wszystkich liczb rzeczywistych λ_j takich, że $1,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ są liniowo niezależne nad $\mathbb{Q}$. Mishou w swojej pracy postawił jednocześnie hipotezę [34, Conjecture 1], że twierdzenie to jest prawdziwe dla dowolnych różnych parametrów λ_j. Jak się okazuje, zaadoptowanie metod dowodowych z pracy [H6] do tego zagadnienia pozwala w pełni rozwiązać tę hipotezę. Mianowicie w pracy [H4] zostało udowodnione następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2 ([H4, Theorem 1])**.** *Załóżmy, że $L(s;\alpha,\lambda_1),\ldots,L(s;\alpha,\lambda_m)$ są funkcjami Lercha o różnych parametrach $\lambda_1,\ldots,\lambda_m\in(0,1]$ oraz przystępnym $\alpha\in(0,1]$. Ponadto, niech $K_j\in D$ będą dowolnymi zbiorami zwartymi o spójnym dopełnieniu oraz $f_j(s)$ funkcjami ciągłymi na zbiorze K_j i nieznikającymi w jego wnętrzu. Wówczas, dla dowolnego $\varepsilon>0$, mamy*

$$\frac{1}{T}\operatorname{meas}\left\{\tau\in[0,T] : \max_{1\leqslant j\leqslant m}\max_{s\in K_j}|L(s+i\tau;\alpha,\lambda_j)-f_j(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

Uogólniona silna rekurencyjność a łączna uniwersalność

W roku 1983 Bagchi [3] odkrył interesujący związek pomiędzy własnością uniwersalności a hipotezą Riemanna. Mianowicie udowodnił on, że hipoteza Riemanna jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru zwartego $K\subset D$ o spójnym dopełnieniu i dowolnego $\varepsilon>0$ mamy

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\operatorname{meas}\left\{\tau\in[0,T] : \max_{s\in K}|\zeta(s+i\tau)-\zeta(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

W języku teorii systemów dynamicznych powyższa nierówność świadczy o silnej rekurencyjności funkcji dzeta Riemanna w prawej otwartej połowie pasa krytycznego.

Powyższy związek hipotezy Riemanna z uniwersalnością można z łatwością przenieść na dowolny przypadek funkcji L, dla której istnieje odpowiednik hipotezy Riemanna oraz udowodniono twierdzenie o uniwersalności (zob. [51, Theorem 8.4]).

Ciekawe uogólnienie powyższego problemu zostało zaproponowane przez T. Nakamurę w pracy [41], gdzie autor rozważał zbiór możliwych parametrów d spełniających nierówność

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \max_{s\in K} |\zeta(s+id\tau) - \zeta(s+i\tau)| < \varepsilon\right\} > 0 \tag{8}$$

dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset D$ o spójnym dopełnieniu i dowolnego $\varepsilon > 0$. Jeżeli funkcja $\zeta(s)$ posiada tą własność dla parametru d, to będziemy mówili, że zachodzi uogólniona silna rekurencyjność funkcji dzeta Riemanna dla parametru d.

Pierwszy wynik dotyczący tej własności został udowodniony już przez T. Nakamurę, który pokazał (zob. [41, Theorem 1.3]), że uogólniona silna rekurencyjność funkcji dzeta Riemanna zachodzi dla prawie wszystkich parametrów rzeczywistych d (poza zbiorem miary zero). Natomiast pierwsza próba dokładnego wyznaczenia zbioru parametrów d, dla których zachodzi uogólniona silna rekurencyjność została przedstawiona w mojej pracy [D10]. Udowodniono tam, że własność silnej rekurencyjności zachodzi dla dowolnego niewymiernego parametru d. Kluczowym elementem rozumowania przedstawionego w tej pracy było pokazanie, że dla dowolnego $d \notin \mathbb{Q}$ istnieje skończony zbiór liczb pierwszych A taki, że zbiór

$$\{\log p : p \text{ jest liczbą pierwszą, } p \notin A\} \cup \{d \log p : p \text{ jest liczbą pierwszą}\}$$

jest liniowo niezależny nad $\mathbb{Q}$. Obserwacja ta pozwoliła również na udowodnienie następującego twierdzenia, z którego w łatwy sposób wynika uogólniona silna rekurencyjność dla dowolnego niewymiernego d.

Twierdzenie 3 ([D10, Theorem 1.1])**.** *Niech $K \subset D$ będzie zbiorem zwartym o spójnym dopełnieniu, a funkcje $f(s), g(s)$ będą ciągłe i nieznikające na K oraz analityczne we wnętrzu tego zbioru. Ponadto, załóżmy, że α, β są dowolnymi liczbami rzeczywistymi liniowo niezależnymi nad $\mathbb{Q}$. Wówczas, dla dowolnego $\varepsilon > 0$, mamy*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \begin{matrix} \max_{s\in K} |\zeta(s+i\alpha\tau) - f(s)| < \varepsilon \\ \max_{s\in K} |\zeta(s+i\beta\tau) - g(s)| < \varepsilon \end{matrix}\right\} > 0.$$

Warto wspomnieć, że twierdzenie to jednocześnie daje odpowiedź na problem postawiony przez A. Weiermanna podczas sesji problemów otwartych na konferencji "New Directions in the Theory of Universal Zeta- and L-Functions" w Würzburgu w 2008 roku.

Jak łatwo można zauważyć, zagadnienie uogólnionej silnej rekurencyjności dla wymiernych parametrów d jest znacznie trudniejsze, gdyż nie można wyznaczyć skończonego zbioru liczb pierwszych A tak, aby zbiór

$$\{\log p : p \text{ jest liczbą pierwszą}, p \notin A\} \cup \{d \log p : p \text{ jest liczbą pierwszą}\} \tag{9}$$

był liniowo niezależny nad $\mathbb{Q}$. Liniowa niezależność tego zbioru jest o tyle kluczowa, że pozwala oczekiwać, że przesunięcia postaci $\zeta(s+i\tau)$ i $\zeta(s+id\tau)$ zachowują się w pewien sposób niezależnie i można oczekiwać prawdziwości odpowiedniego wariantu Twierdzenia 3. Jednak, jak łatwo można zauważyć, do uzyskania uogólnionej silnej rekurencyjności nie jest konieczne pokazanie, że przesunięcia $\zeta(s+i\tau)$ i $\zeta(s+id\tau)$ przybliżają dwie dowolne wybrane funkcje f, g, odpowiednio. Mianowicie wystarczy pokazać, że istnieje co najmniej jedna funkcja f taka, że przesunięcia $\zeta(s+i\tau)$ i $\zeta(s+id\tau)$ przybliżają jednocześnie tę funkcję $f(s)$. Ta obserwacja została użyta w pracy wspólnej z T. Nakamurą [D3], co pozwoliło uzyskać prawdziwość uogólnionej silnej rekurencyjności dla pewnych wymiernych parametrów d, które są ułamkami postaci a/b dla względnie pierwszych liczb całkowitych a, b spełniających nierówność $|a-b| \neq 1$.

Inne, znacznie bardziej subtelne, podejście do problemu uogólnionej silnej rekurencyjności funkcji dzeta Riemanna dla wszystkich wymiernych niezerowych parametrów d zostało przedstawione w pracy [H2], w której ominięto brak liniowej niezależności nad $\mathbb{Q}$ zbioru w (9). Dokładna analiza funkcji postaci $\Delta(z)$ (zob. (7)), a dokładniej mówiąc pokazanie, że w pewnych krótkich przedziałach argument tej funkcji zmienia się nieznacząco, pozwoliło na udowodnienie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4 ([H2, Theorem 1.1])**.** *Niech $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ oraz $a/b \neq \pm 1$. Załóżmy, że $K \subset D$ jest zbiorem zwartym o spójnym dopełnieniu oraz $f_a(s), f_b(s)$ są funkcjami ciagłymi i nieznikającymi na K oraz analitycznymi we wnętrzu K. Wówczas, dla dowolnego $\varepsilon > 0$, mamy*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \max_{c\in\{a,b\}} \max_{s\in K} |\zeta(s+ic\tau) - f_c(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Kluczowym elementem w dowodzie powyższego twierdzenia jest fakt, że wartości $\exp(2\pi i b\theta)$ tworzą dłuższy łuk na okręgu jednostkowym niż $\exp(2\pi i a\theta)$, gdy θ przebiega wartości pewnego ustalonego odcinka oraz $|a| < |b|$. Oczywiście własność ta nie ma miejsca w przypadku, gdy $|a| = |b|$, co powoduje, że użyta technika dowodowa jest skuteczna jedynie dla $a/b \neq \pm 1$. Warto jednak zauważyć, że oczywiście powyższe twierdzenie nie jest prawdziwe dla $a/b = 1$. Co więcej, stosując równość $\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)}$, nie może zachodzić również dla $a/b = -1$. W związku z tym, powyższe twierdzenie daje kompletną odpowiedź na problem postawiony przez A. Weiermanna dotyczący łącznej uniwersalności przesunięć postaci $\zeta(s+ia\tau)$ i $\zeta(s+ib\tau)$.

Łatwym wnioskiem powyższego twierdzenia jest fakt, że uogólniona silna rekurencyjność funkcji dzeta Riemanna zachodzi również dla dowolnych parametrów wymiernych $d \neq 0, \pm 1$. Ponieważ jednak przypadek uogólnionej silnej rekurencyjności dla $d = \pm 1$ można uzasadnić w sposób trywialny, powyższe wyniki prowadzą do następującego twierdzenia, które pozostawia otwartość problemu uogólnionej silnej rekurencyjności jedynie dla przypadku $d = 0$, który, jak już wspomnieliśmy, jest równoważny hipotezie Riemanna.

Twierdzenie 5 ([H2, Theorem 1.4])**.** *Dla dowolnego rzeczywistego $d \neq 0$ zachodzi uogólniona silna rekurencyjność funkcji dzeta Riemanna.*

W świetle powyższego twierdzenia interesującym problemem badawczym jest zbadanie jak zachowuje się dolna gęstość zbioru parametrów τ opisanego w (8), gdy d jest parametrem dostatecznie małym. Zagadnienie to zostało opisane w pracy [H5]. Udowodniono w niej następujące dwie efektywne wersje uogólnionej silnej rekurencyjności, które przedstawimy tutaj w nieco technicznie prostszej wersji. Dla przejrzystości ograniczymy się tutaj do dodatnich parametrów d, zbioru K postaci $\{s \in \mathbb{C} : |s - (\frac{3}{4} + i\lambda)| \leqslant r\}$, $0 < r < 1/4$ oraz zdefiniujmy $\omega := 1/4 - r$.

Pierwszy rezultat dotyczy przypadku $d = a/b \in \mathbb{Q}$, gdzie $|a - b| \neq 1$ oraz $(a, b) = 1$. Dla przejrzystości zapisu ograniczymy się do przypadku $d = 1/n$ dla $n \geqslant 3$.

Twierdzenie 6 ([H5, Theorem 1.3])**.** *Niech $d = \frac{1}{n}$ dla $n \geqslant 3$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$ oraz*

$$\log T \geqslant 217 \exp\left(\frac{10}{\omega}\left(\frac{\exp\left(\frac{7}{2\omega} + (n-1)(3+2\lambda)\right)\left(55(n+1) + \frac{115}{\omega}\right)}{2\varepsilon}\right)^{1/\omega}\right)\omega^{-45/\omega}.$$

Wtedy miara zboru liczb $\tau \in [T, 2T]$ spełniających

$$\max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - \zeta(s + id\tau)| < \varepsilon$$

jest większa niż

$$\frac{T}{2}\exp\left(-\left(\frac{\exp\left(\frac{7}{2\omega} + (n-1)(3+2\lambda)\right)\left(55(n+1) + \frac{115}{\omega}\right)}{2\varepsilon}\right)^{1/\omega}\right).$$

Dowód powyższego twierdzenia bazował na użyciu ilościowej wersji twierdzenia Kroneckera udowodnionej przez Koskmę.

Dla algebraicznych niewymiernych parametrów d pojawia się dodatkowa trudność związana z uzyskaniem dolnego oszacowania sumy $\Lambda = \sum_{p \leqslant Q}(h_p + dh'_p)\log p$, gdzie h_p, h'_p są liczbami całkowitymi i co najmniej jedna z nich jest różna od 0. W tym celu zostało użyte twierdzenie Waldschmidta (zob. [55]) dotyczące efektywnego oszacowania z dołu pewnych kombinacji logarytmów.

Twierdzenie 7 ([H5, Theorem 1.4]). *Niech $d > 0$ niewymierną liczbą algebraiczną stopnia D nad ciałem $\mathbb{Q}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, i $c(d) := 10 \cdot 2^{71} D^6 (h(d) + 1)$, gdzie $h(d)$ oznacza bezwzględną logarytmiczną wysokość liczby d. Wówczas, dla dowolnego T takiego, że*

$$\frac{\sqrt{\log T}}{\log\log T} \geqslant 217\sqrt{c(d)} \max\left(\exp(\lambda/d),\right.$$
$$\left.(2.28)^2 \exp\left(\left(\left(\frac{110\exp\left(\frac{7}{2\omega}+3+2\lambda\right)}{\omega\varepsilon}\right)^{1/\omega}\right)\omega^{-16}\right)^{5/2}\right),$$

miara zbioru liczb $\tau \in [T, 2T]$ spełniających

$$\max_{s\in K} |\zeta(s + i\tau) - \zeta(s + id\tau)| < \varepsilon$$

jest większa niż $\frac{T}{2} \exp\left(-\left(\frac{110\exp\left(\frac{7}{2\omega}+3+2\lambda\right)}{2\omega\varepsilon}\right)^{1/\omega}\right)$.

Praca [H7] podaje dość ogólną strategię jak z jednej funkcji L (lub kolekcji funkcji L niekoniecznie niezależnych) uzyskać zbiór funkcji łącznie uniwersalnych w pewnym sensie. Zauważmy, że wspomniane już twierdzenie Voronina o łącznej uniwersalności dla funkcji L Dirichleta oraz jego uogólnienie dla splotów funkcji L z klasy Selberga z parami nierównoważnymi charakterami Dirichleta świadczą o tym, że branie odpowiednich splotów funkcji L tworzy z niej zbiór funkcji łącznie uniwersalnych.

Inne podejście do tego problemu zaproponowali Kaczorowski, Laurinčikas i Steuding [20]. Wprowadzili oni tzw. zasadę uniwersalnych przesunięć, która mówi, że dla dowolnej funkcji uniwersalnej $L(s)$ i dowolnych różnych liczb rzeczywistych $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ funkcje $L(s + i\lambda_1), \ldots, L(s + i\lambda_n)$ są łącznie uniwersalne dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset D$ takiego, że $K_k \cap K_j = \emptyset$, gdzie $K_j = \{s + \lambda_j : s \in K\}$.

Uogólniając ten problem można zapytać o funkcje $\gamma_1, \ldots, \gamma_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla których dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset D$ o spójnym dopełnieniu i dowolnych nieznikających ciągłych funkcji $f_1, \ldots, f_n$ na K, analitycznych w jego wnętrzu, zachodzi nierówność

$$\frac{1}{T}\,\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0, T] : \max_{s\in K} |L(s + i\gamma_j(\tau)) - f_j(s)| < \varepsilon\right\} > 0, \tag{10}$$

gdzie L jest ustaloną funkcją L spełniającą odpowiednie warunki.

Oczywiście zasada uniwersalnych przesunięć podejmuje tę problematykę dla najprostszych funkcji postaci $\gamma_j(\tau) = \tau + \lambda_j$. Przypadek funkcji $\gamma_j(\tau) = a_j\tau + b_j$

można sprowadzić do przypadku, gdy $b_j = 0$. Z kolei przypadek $\gamma_j(\tau) = a_j\tau$ został już rozstrzygnięty w serii prac dotyczących uogólnionej silnej rekurencyjności i opisanych powyżej. Przypadek dowolnej liczby funkcji γ_j został podjęty przez Nakamurę w pracy [41], gdzie udowodniono, że (10) zachodzi dla dowolnych liczb algebraicznych $a_1, \ldots, a_n$ liniowo niezależnych nad $\mathbb{Q}$. Natomiast przypadek $n = 2$ został ostatecznie rozwiązany w pracy [H2], gdzie pokazano, że (10) zachodzi dla $\gamma_1(\tau) = a_1\tau$ i $\gamma_2(\tau) = a_2\tau$, o ile a_1, a_2 są niezerowymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi nierówność $a_1 \neq \pm a_2$ (zob. Twierdzenie 4).

W pracy [H7] został zbadany przypadek funkcji postaci $\gamma_j(\tau) = \alpha_j \tau^{a_j}(\log\tau)^{b_j}$. Mianowicie udowodnione zostało następujące twierdzenie. Dla prostoty zostało ono sformułowane dla funkcji L Dirichleta, jednak prawdziwe jest ono dla szerokiej klasy funkcji uniwersalnych L.

Twierdzenie 8 ([H7, Theorem 1])**.** *Załóżmy, że $\chi_1, \ldots, \chi_n$ są charakterami Dirichleta, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ są dodatnie i $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ takie, że*

$$b_j \in \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{if } a_j \notin \mathbb{Z}; \\ (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) & \textit{if } a_j \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

oraz $a_j \neq a_k$ lub $b_j \neq b_k$ dla $k \neq j$. Ponadto, niech $K \subset D$ będzie zbiorem zwartym o spójnym dopełnieniu, $f_1, \ldots, f_n$ będą ciągłe i nieznikające K oraz analityczne we wnętrzu K. Wówczas, dla dowolnego $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [2, T] : \max_{1\leqslant j\leqslant n} \max_{s\in K} |L(s + i\alpha_j\tau^{a_j}\log^{b_j}\tau; \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon\right\} > 0. \tag{11}$$

Podkreślmy, że powyższe twierdzenie podaje nową metodę pozwalającą przybliżać dowolną kolekcję funkcji analitycznych przez odpowiednie przesunięcie dowolnie wybranych funkcji L (niekoniecznie niezależnych).

W pracy [H7] poruszony został również problem uniwersalności dyskretnej, gdzie parametr τ przebiega zbiór liczb naturalnych. Dyskretną wersją nierówności (10) dla $n = 1$ i $\gamma_1(k) = \alpha k$ jako pierwsi zajęli się niezależnie B. Bagchi [2] i A. Reich [44]. Przypadek $n \geqslant 1$ i $\gamma_j(k) = \alpha_j k$ został zbadany dla funkcji L Dirichleta przez A. Dubickasa i A. Laurinčikasa [14]. Natomiast ostatnio A. Laurinčikas, E. Macaitienė i D. Šiaučiūnas [24] zbadali to zagadnienie dla $n \geqslant 1$ i $\gamma_j(k) = \alpha_j k^a$, $a \in (0, 1)$. Dyskretna wersja nierówności (10) została udowodniona dla znacznie ogólniejszych funkcji $\gamma_j(k)$ w pracy [H7] i sformułowana w postaci następującego twierdzenia.

Twierdzenie 9 ([H7, Theorem 2])**.** *Załóżmy, że $\chi_1, \ldots, \chi_n$ są charakterami Dirichleta, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ są dodatnie i $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ takie, że*

$$b_j \in \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{if } a_j \notin \mathbb{Z}; \\ (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) & \textit{if } a_j \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

oraz $a_j \neq a_k$ lub $b_j \neq b_k$ dla $k \neq j$. Ponadto, niech $K \subset D$ będzie zbiorem zwartym o spójnym dopełnieniu, $f_1, \ldots, f_n$ będą ciągłe i nieznikające K oraz analityczne we wnętrzu K. Wówczas, dla dowolnego $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sharp\left\{2 \leqslant k \leqslant N : \max_{1\leqslant j\leqslant n}\max_{s\in K}|L(s+i\alpha_j k^{a_j}\log^{b_j} k;\chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon\right\} > 0. \tag{12}$$

Duże wartości funkcji L

Jedną z podstawowych konsekwencji własności uniwersalności funkcji dzeta Riemanna jest fakt, że przyjmuje ona dowolnie małe i dowolnie duże wartości na prostej $\sigma + it$, $t \in \mathbb{R}$, gdy $\sigma \in (1/2, 1)$. Jak jednak wiadomo własność ta jest również prawdziwa na prostej krytycznej. Stąd w sposób naturalny pojawia się pytanie o rząd wielkości wartości jakie może przyjmować funkcja $\zeta(\sigma + it)$. Wiadome jest, że przyjmowane w tej sposób wartości nie mogą być zbyt dużego rzędu, gdyż $\zeta(\sigma + it)$ jest ograniczona z góry przez odpowiednia potęgę t. Niech $\mu_\zeta(\sigma)$ oznacza infimum po wszystkich wartościach $c \geqslant 0$, dla których $\zeta(\sigma + it) \ll t^c$ dla dostatecznie dużego t. Wówczas klasycznym wynikiem jest oszacowanie $\mu_\zeta(\sigma) \leqslant (1-\sigma)/2$ dla $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. Oszacowaniem z góry wielkości $\mu_\zeta(\sigma)$, w szczególności dla $\sigma = 1/2$, zajmowało się wielu matematyków i jest to wciąż jeden z głównych problemów współczesnej teorii liczb. Dla przykładu, otwarta jest wciąż ważna hipoteza Lindelöfa, która przypuszcza, że $\mu_\zeta(\sigma) = 0$ dla $\sigma \geqslant 1/2$ (zob. [52, Chapter V]). Warto wspomnieć, że założenie prawdziwości hipotezy Riemanna daje (zob. [52, Chapter XIV]), że

$$\log\zeta(\sigma+it) \ll \frac{(\log t)^{2-2\sigma}}{\log\log t} \qquad \text{dla } \frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1,$$

co implikuje prawdziwość hipotezy Lindelöfa.

Z drugiej strony można zapytać o wyniki typu omega dla wartości $\zeta(\sigma + it)$. Pierwszy wynik w tym kierunku został udowodniony przez Titchmarsha [52, Theorem 8.12]. Pokazał on, że dla dowolnego $\sigma \in [1/2, 1)$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ nierówność $|\zeta(\sigma + it)| > \exp\left((\log t)^{1-\sigma-\varepsilon}\right)$ zachodzi dla pewnych dowolnie dużych wartości t. W 1977 roku Montgomery [36], stosując inną metodę, pokazał, że dla dowolnego $\sigma \in (1/2, 1)$ i dowolnego dostatecznie dużego T istnieje t takie, że $T^{(\sigma-1/2)/3} \leqslant t \leqslant T$ oraz

$$|\zeta(\sigma+it)| \geqslant \exp\left(\frac{1}{20}\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^{1/2}\frac{(\log T)^{1-\sigma}}{(\log\log T)^{\sigma}}\right).$$

Co więcej, wykazał on, że przy założeniu hipotezy Riemanna powyższa nierówność może zostać rozszerzona do przedziału $\sigma \in [1/2, 1)$ z odrobinę lepszą stałą i lepszym zakresem dotyczącym t.

Pierwszy bezwarunkowy wynik dla $\sigma = 1/2$ został pokazany przez Balasubramaniana i Ramachandrę w pracy [5]. Natomiast najlepsze oszacowanie tego typu na prostej krytyczne zostało pokazane ostatnio przez Bondarenkę i Seipa w [11], gdzie udowodniono, że

$$\max_{T^{1/2}\leqslant t\leqslant T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| \geqslant \exp\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+o(1)\right)\sqrt{\frac{\log T\log\log\log T}{\log\log T}}\right).$$

Dowód powyższej nierówności bazuje na tzw. metodzie rezonansu opracowanej przez K. Soundararajana [49] oraz związku wartości ekstremalnych funkcji dzeta Riemanna z pewnymi sumami związanymi z największym wspólnym dzielnikiem tzw. sumami GCD.

Problem wartości ekstremalnych dla pozostałych funkcji L został początkowo zbadany przez Balakrishnana [4], który pokazał odpowiednik twierdzenia Mongomery'ego dla funkcji dzeta Dedekinda. Natomiast Sankaranarayanan i Sengupta [47] uogólnili metodę Mongomery'ego na dość szeroką klasę szeregów Dirichleta o rzeczywistych współczynnikach. Przypadek dowolnych zespolonych współczynników w rozwinięciu funkcji L w szereg Dirichleta został podjęty w pracy [H1] napisanej wspólnie z J. Steudingiem. Pokazano w niej, że dla dowolnej funkcji $L(s)=\sum_{n\geqslant 1}a(n)n^{-s}$ z klasy Selberga takiej, że $L(s)\neq 0$ dla $\sigma>1/2$ oraz

$$\sum_{p\leqslant x}|a_L(p)| = \kappa\frac{x}{\log x}+\mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^2 x}\right),\qquad (\kappa>0) \tag{13}$$

mamy

$$\max_{t\in[T,2T]}|L(\sigma+it)|\geqslant \exp\left(c\frac{(\log T)^{1-\sigma}}{(\log\log T)^{2-\sigma}}\right) \tag{14}$$

dla pewnej dokładnie wyznaczonej stałej $c>0$ i dostatecznie dużego T.

Warto tutaj wspomnieć, że warunek (13) dla funkcji L z klasy Selberga o wielomianowym iloczynie Eulera można w łatwy sposób zastąpić przez bardziej naturalne żądanie, aby

$$\sum_{p\leqslant x}|a_L(p)|^2 = \kappa\frac{x}{\log x}+\mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^2 x}\right),\qquad (\kappa>0). \tag{15}$$

Zauważmy, że uzyskane oszacowanie z dołu dla wartości ekstremalnych dowolnej funkcji L jest słabsze niż znane wyniki dla funkcji dzeta Riemanna lub funkcji L o rzeczywistych współczynnikach Dirichleta. Związane jest to z koniecznością zastosowania efektywnej wersji twierdzenia o niejednorodnych aproksymacjach diofantycznych, która jest znacznie subtelniejsza niż przypadek jednorodnych aproksymacji diofantycznych odgrywających kluczową rolę w oryginalnej metodzie Montgomery'ego.

W pracy [H3], napisanej wspólnie z C. Aistleitnerem, zostały kontynuowane badania nad wartościami ekstremalnymi funkcji L z klasy Selberga. Głównym wynikiem tej pracy jest następujący rezultat.

Twierdzenie 10 ([H3, Theorem 1.2])**.** *Załóżmy, że* $L = \sum_{n\geqslant 1} a_L(n)n^{-s} \in \mathcal{S}_{\text{poly}}$ *spełnia równość*

$$\sum_{p\leqslant x} |a_L(p)|^2 = (\kappa + o(1))\frac{x}{\log x} \qquad (\kappa > 0). \tag{16}$$

Wówczas dla dowolnego ustalonego $\sigma \in [1/2, 1)$ *i dostatecznie dużego* T *mamy*

$$\max_{t\in[T,2T]} |L(\sigma + it)| \geqslant \exp\left((C_L(\sigma) + o(1))\,\frac{(\log T)^{1-\sigma}}{(\log\log T)^{\theta(\sigma)}}\right),$$

gdzie $\theta(1/2) = 1/2$ *i* $\theta(\sigma) = 1$ *w przeciwnym przypadki, oraz gdzie*

$$C_L(\sigma) = \begin{cases} \kappa^\sigma m^{1-2\sigma}\frac{(3-2\sigma)^{3/2-\sigma}}{2(2\sigma-1)^{1/2}} & \textit{if } \frac{1}{2} < \sigma < 1; \\ \sqrt{\kappa} & \textit{if } \sigma = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Zauważmy, że powyższe twierdzenie poprawia oszacowanie dolne uzyskane w pracy [H1] oraz w znaczący sposób osłabia założenia jakie musi spełniać dana funkcja L. Po pierwsze nie wymagamy już, aby funkcja L spełniała analog hipotezy Riemanna oraz nie jest konieczna żadna informacja na temat członu resztowego w (16).

Ponadto podkreślmy, że oszacowanie dolne dla dowolnej funkcji L jest wciąż niższego rzędu niż znane wyniki dla funkcji dzeta Riemanna. Związane jest to ściśle z zastosowaniem w dowodzie powyższego twierdzenia metody rezonansu, która nawet dla funkcji dzeta Riemanna bezpośrednio daje jedynie oszacowania rzędu jak w powyższym twierdzeniu (zob. [18]). Dopiero subtelna metoda długich rezonatorów zaproponowana przez C. Aistleitnera w pracy [1] pozwoliła uzyskać dla $\sigma \in (1/2, 1)$ i funkcji dzeta Riemanna oszacowanie dolne dla wartości ekstremalnych rzędu $\exp(C(\log t)^{1-\sigma}/(\log\log t)^\sigma)$. Metoda ta również odgrywała kluczową rolę w wyniku dotyczącym przypadku prostej krytycznej uzyskanego przez Bondarenkę i Seipa. Niestety, metoda ta polega na szacowaniu z dołu pewnych sum poprzez eliminowaniu ich pewnych niepożądanych składników, co jest możliwe jedynie dla dodatnich składników. Jednak w przypadku dowolnej funkcji L jej współczynniki powodują, że składniki wspomnianej sumy stają się liczbami zespolonymi, co uniemożliwia zastosowanie metody Aistleitnera.

Co ciekawe, w pracy [H3] zostało również zauważone, że subtelniejsze rozważania dotyczące metody zastosowanej w pracy [H1] oraz zastosowanie lepszego efektywnego twierdzenia o aproksymacjach diofantycznych prowadzą do uzyskania następującego twierdzenia poprzez metodę Montgomery'ego.

Twierdzenie 11 ([H3, Theorem 1.3])**.** *Niech $L(s)$ będzie elementem klasy Selberga $\mathcal{S}$ zdefiniowanym dla $\operatorname{Re} s > 1$ szeregiem Dirichleta $\sum_{n\geqslant 1} a_L(n)n^{-s}$ oraz θ i $\sigma \in [1/2, 1)$ będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Ponadto, załóżmy, że istnieje liczba $\eta > 0$ taka, że*

$$N(\sigma, T) := \sharp\{\rho = \beta + i\gamma : L(\rho) = 0,\ \beta > \sigma,\ 0 < \gamma \leqslant T\} \ll T^{1-\eta}, \tag{17}$$

oraz

$$\sum_{p\leqslant x} |a_L(p)| = (\kappa + o(1))\frac{x}{\log x} \qquad (\kappa > 0). \tag{18}$$

Wówczas, dla dostatecznie dużego T, mamy

$$\max_{t\in[T,2T]} \operatorname{Re} e^{-i\theta} \log L(\sigma + it) \geqslant c_{\kappa,\eta}\frac{(\log T)^{1-\sigma}}{\log\log T},$$

gdzie

$$c_{\kappa,\eta} = \frac{(1 - e^{-1})\kappa}{4}\left(\frac{\eta}{4\sqrt{e}}\right)^{1-\sigma}.$$

Jak widzimy, modyfikacje obu znanych metod (metod Soundararajana i Montgomery'ego) dowodzenia wyników typu omega dla wartości ekstremalnych funkcji L prowadzą do nieco słabszych oszacowań niż ich odpowiednie warianty uzyskane w przypadku funkcji dzeta Riemanna.

Kolejny wynik w pracy [H3] dotyczy wartości ekstremalnych funkcji L na prostej $1 + it$, $t \in \mathbb{R}$. Zagadnienie to zostało dosyć dobrze zbadane przez wielu matematyków dla funkcji dzeta Riemanna. Najlepszy znany wynik został udowodniony przez Granville'a i Soundararajana w pracy [17], gdzie autorzy pokazali, że

$$\max_{T\leqslant t\leqslant 2T} |\zeta(1 + it)| \geqslant e^\gamma(\log\log T + \log\log\log T - \log\log\log\log T + \mathcal{O}(1)).$$

Jak widzimy wartości ekstremalne funkcji dzeta Riemanna na prostej $1 + it$ mogą przyjmować wielkości możliwego maksymalnego rzędu, gdyż, jak wiemy, hipoteza Riemanna daje oszacowanie $\zeta(1 + it) \ll \log\log t$ dla dostatecznie dużego t.

Podobne oszacowanie górne dla wartości funkcji L na prostej $1 + it$ zostały pokazane w [H3]. Mianowicie udowodniono [H3, Proposition 1.1], że dla dowolnej funkcji $L \in \mathcal{S}$ spełniającej warunek (18) prawdziwe jest oszacowanie $L(1 + it) \ll (\log\log t)^\kappa$. Znane oszacowanie z dołu wartości uogólnień funkcji dzeta Riemanna zostało pokazane przez J. Steudinga [50]. Pokazał on dla funkcji L Dirichleta, że

$$|L(1 + it, \chi)| = \Omega\left(\frac{\log\log\log t}{\log\log\log\log t}\right).$$

Jak się okazuje stosując twierdzenie Chena [13], które odgrywało kluczową role przy dowodzie Twierdzenia 11, prowadzi do następującego wyniku.

Twierdzenie 12 ([H3, Theorem 1.4])**.** *Niech funkcja $L(s) \in \mathcal{S}$ będzie zdefiniowana za pomocą szeregu $\sum_{n\geqslant 1} a_L(n)n^{-s}$ dla $\operatorname{Re} s > 1$. Załóżmy, że zachodzi (13) i θ jest dowolną liczbą rzeczywistą. Wówczas, dla dostatecznie dużego T, istnieje $\sigma > 1$ oraz $t \in [T, 2T]$ takie, że*

$$\operatorname{Re} e^{-i\theta} \log L(\sigma + it) \geqslant \kappa \log\log\log T + \mathcal{O}(1). \tag{19}$$

W szczególności,

$$|L(1 + it)| = \Omega((\log\log t)^{\kappa}).$$

Powyższe twierdzenie w znaczący sposób poprawia wynik uzyskany przez J. Steudinga i jednocześnie pokazuje, że również funkcje L z klasy Selberga przyjmują na prostej $1 + it$ wartości o możliwie maksymalnym rzędzie wzrostu.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych.

Zawartość prac [D3], [D10] została szczegółowo omówiona przy okazji prezentowania wyników pracy [H2] dotyczącej uogólnionej silnej rekurencyjności. Zagadnienie to poruszane jest również w pracy [D7], gdzie wspólnie z E. Karikovasem udowodniliśmy, że funkcja dzeta Hurwitza $\zeta(s;\alpha)$ związana z wymiernym parametrem $\alpha = a/b$, $0 < a < b$ i $\operatorname{nwd}(a, b) = 1$, spełnia własność silnej rekurencyjności dla wszystkich niewymiernych parametrów d. Wynik ten uzupełnia badania podjęte przez R. Garunkštisa i E. Karikovasa [15] dotyczące uogólnionej silnej rekurencyjności funkcji $\zeta(s;\alpha)$ dla przystępnych α.

Uogólnionej silnej rekurencyjności dotyczy również praca [D5]. Udowodniono w niej kilka twierdzeń dotyczących wyznaczenia liczb $d \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ spełniających nierówność

$$\forall_{\varepsilon>0} \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0, T] : \max_{s\in K} |\zeta(s + \lambda + id\tau) - \zeta(s + i\tau)| < \varepsilon\right\} > 0,$$

gdzie K jest podzbiorem zwartym pasa $\{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \operatorname{Re}(s) < 1\}$ lub półpłaszczyzny $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 1\}$.

Praca [D1] dotyczy tzw. hybrydowej wersji twierdzenia o łącznej uniwersalności, która mówi, że zbiór parametrów τ, dla których przesunięcia funkcji L postaci $L_j(s+it)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ przybliżają dowolnie wybrane funkcje analityczne $f_j(s)$ (jak w twierdzeniu Voronina) i spełniona jest nierówność $\max_{1\leqslant j\leqslant m} |\exp(2\pi i\tau\alpha_j) - \exp(2\pi i\theta_j)| < \varepsilon$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$, liniowo niezależnych nad $\mathbb{Q}$ liczb $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ i dowolnych $\theta_1, \ldots, \theta_m \in \mathbb{R}$, ma dodatnią dolną gęstość. Wynik ten był wcześniej znany [16, 19] jedynie dla ciągu $\alpha_j = \log p_j$, gdzie p_j oznaczają różne liczby pierwsze. Wariant tego twierdzenia dla funkcji typu Hurwitza tj. funkcji dzeta Hurwitza, funkcji dzeta Lercha czy okresowych funkcji dzeta Hurwitza został udowodniony w pracy [D6].

Hybrydowa wersja twierdzenia o uniwersalności ma liczne zastosowania pozwalająca w łatwy sposób uzasadnić własność uniwersalności w sensie Voronina dla funkcji, które można zapisać jako odpowiednie kombinacje funkcji L_j, dla których prawdziwe jest twierdzenie o hybrydowej łącznej uniwersalności. Zagadnienie to zostało podjęte w pracach [D2, D4], gdzie stosując tę metodę poszerzono klasę funkcji uniwersalnych o nowe przykłady. Na szczególną uwagę zasługuje tutaj uzyskane i dotąd niezbadane twierdzenie o uniwersalności funkcji dzeta wielu zmiennych takich jak: wielokrotna funkcja dzeta Eulera–Zagiera lub podwójna funkcja dzeta Tronheima–Hurwitza. Zagadnienie hybrydowej łącznej uniwersalności i jej zastosowań został zebrany w pracy przeglądowej [D11].

W pracy [D8] podjęte zostało zagadnienie liczby zer w pasie krytycznym funkcji $F(s)$, która da się przedstawić jako wielomian na funkcji L o współczynnikach będących bezwzględnie zbieżnymi ogólnymi szeregami Dirichleta. Pokazano w niej, że przy odpowiednich dość naturalnych założeniach liczba zer funkcji $F(s)$ w obszarze $1/2 < \sigma_1 \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant \sigma_2 < 1$, $0 \leqslant \mathrm{Im}(s) \leqslant T$ wynosi $\asymp T$. Klasa funkcji dająca się zapisać w powyższej postaci i spełniających założenia głównego twierdzenia pracy [D8] jest dość obszerna i zawiera takie przykłady jak: funkcje dzeta związane z macierzami symetrycznymi, pewne spektralne funkcje dzeta, wielokrotne funkcje dzeta Eulera-Zagiera oraz wielokrotne funkcje dzeta Barnesa i Shintaniego. Warto tutaj wspomnieć, że w pracy tej został uzyskany pierwszy wynik dotyczący rozmieszczenia zer wielokrotnych funkcji dzeta.

W pracy [D12] zostało pokazane, że dla funkcji dzeta Epsteina $\zeta(s; A)$ związanej z dodatnie określoną macierzą A wymiaru $n \times n$ i dowolnego $c \in \mathbb{C}$ równanie $\zeta(s; A) = c$ ma co najmniej CT, dla pewnej stałej $C > 0$, rozwiązań w obszarze $\mathrm{Re}(s) > (n-1)/2$, $0 \leqslant \mathrm{Im}(s) \leqslant T$, gdy $n \geqslant 4$ jest liczbą parzystą.

Praca [D9] dotyczy dość obszernej klasy $\mathcal{S}_A$ funkcji zdefiniowanych, dla $\mathrm{Re}(s) > 1$, za pomocą szeregu Dirichleta

$$\mathcal{L}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \prod_p \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(p^k)}{p^{ks}} \right),$$

gdzie $a(n) \ll n^{\varepsilon}$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $b(p^k) \ll p^{k\theta}$ dla pewnego $\theta < 1/2$. Zauważmy, że powyższa klasa obejmuje wszystkie funkcje z klasy Selberga $\mathcal{S}$. Warto jednak zauważyć, że klasa $\mathcal{S}_A$ jest istotnie większa, ponieważ $\zeta(s)/\zeta(2s) \in \mathcal{S}_A \setminus \mathcal{S}$. Główny wynik pracy dotyczy rozmieszczenia wartości m-tej pochodnej funkcji $\log \mathcal{L}(s)$, które zostało dotychczas dosyć dobrze zbadane jedynie dla funkcji dzeta Riemanna w przypadku pochodnych niskiego rzędu.

Twierdzenie 13 ([D9, Theorem 1.1])**.** *Niech* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $z \in \mathbb{C}$ *i* $\mathcal{L}(s) :=$

$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s} \in \mathcal{S}_A$ *spełnia*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p\leqslant x} |a(p)|^2 = \kappa \tag{20}$$

dla pewnego $\kappa > 0$. *Wówczas, dla dowolnego* $\delta > 0$, *mamy*

$$\#\big\{s : 1 < \mathrm{Re}(s) < 1+\delta,\ \ \mathrm{Im}(s) \in [0,T]\ \ i\ \ (\log \mathcal{L}(s))^{(m)} = z\big\} \gg T \tag{21}$$

dla dostatecznie dużego T.

Łatwymi wnioskami z powyższego twierdzenia jest fakt, że funkcja $\mathcal{L}(s)$ przyjmuje dowolne wartości zespolone $z \neq 0$ nieskończenie wiele razy w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}(s) > 1$ (zob. [D9, Corollary 1.4]). Co więcej, można z niego wywnioskować, że pochodna funkcji $\mathcal{L}(s)$ oraz kombinacje $c_1\mathcal{L}_1(s) + c_2\mathcal{L}_2$ przyjmują nieskończenie wiele zer na prawo od prostej $\mathrm{Re}(s) = 1$ (zob. [D9, Corollary 1.5, Corollary 1.6]). Warto tutaj podkreślić, że zagadnienie rozmieszczenia zer dość ogólnych kombinacji liniowych funkcji L w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}(s) > 1$ zostało dobrze zbadane przez Saiasa i Weingartnera [46] dla funkcji L Dirichleta oraz dla ogólnych funkcji L przez A. Bookera i F. Thorne'a [12], a następnie przez M. Righettiego [45]. Jednak metoda zaprezentowana w pracy [D9] pozwala rozstrzygać istnienie nieskończenie wielu zer również dla kombinacji postaci $c_1\mathcal{L}_1(s) + c_2\mathcal{L}_2$, gdzie odcięta bezwzględnej zbieżności funkcji $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ niekoniecznie wynosi 1, co miało kluczową rolę w pracach bazujących na idei Saiasa i Weingartnera. Dla przykładu, [D9, Corollary 1.6] pozwala udowodnić istnienia nieskończenie wielu zer podwójnej funkcji dzeta Eulera-Zagiera, gdyż $\zeta_2(s,s) = (\zeta^2(s) = \zeta(2s))/2$.

Spis publikacji własnych nie wchodzących w skład osiągnięcia, o którym mowa w pkt. 4.

Publikacje wymienione w Załączniku 3 w punkcie II A (w czasopismach z bazy JCR):

[D1] Ł. Pańkowski, *Hybrid joint universality theorem for Dirichlet L-functions*, Acta Arith. **141** (2010), no. 1, 59–72.

[D2] T. Nakamura, Ł. Pańkowski, *Applications of hybrid universality to multivariable zeta-functions*, J. Number Theory **131** (2011), no. 11, 2151–2161.

[D3] T. Nakamura, Ł. Pańkowski, *Erratum to: The generalized strong recurrence for non-zero rational parameters*, Arch. Math. (Basel) **99** (2012), no. 1, 43–47.

[D4] T. Nakamura, Ł. Pańkowski, *On universality for linear combinations of L-functions*, Monatsh. Math. **165** (2012), no. 3-4, 433–446.

[D5] T. Nakamura, Ł. Pańkowski, *Self-approximation for the Riemann zeta function*, Bull. Aust. Math. Soc. **87** (2013), no. 3, 452–461.

[D6] Ł. Pańkowski, *Hybrid universality theorem for L-functions without Euler product*, Integral Transforms Spec. Funct. **24** (2013), no. 1, 39–49.

[D7] E. Karikovas, Ł. Pańkowski, *Self-approximation of Hurwitz zeta-functions with rational parameter*, Lith. Math. J. **54** (2014), no. 1, 74–81.

[D8] T. Nakamura, Ł. Pańkowski, *On complex zeros off the critical line for non-monomial polynomial of zeta-functions*, Math. Z. **284** (2016), no. 1-2, 23–39.

[D9] T. Nakamura, Ł. Pańkowski, *Value distribution for the derivatives of the logarithm of L-functions from the Selberg class in the half-plane of absolute convergence*, J. Math. Anal. Appl. **433** (2016), no. 1, 566–577.

Publikacje wymienione w Załączniku 3 w punkcie II C (monografie, artykuły w czasopismach spoza JCR):

[D10] Ł. Pańkowski, *Some remarks on the generalized strong recurrence for L-functions*, New directions in value-distribution theory of zeta and L-functions, Ber. Math., Shaker Verlag, Aachen, 2009, pp. 305–315.

[D11] Ł. Pańkowski, *On hybrid universality for L-functions*, Functions in number theory and their probabilistic aspects, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B34, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2012, pp. 319–334.

[D12] T. Nakamura, Ł. Pańkowski, *On zeros and c-values of Epstein zeta-functions*, Šiauliai Math. Semin. **8(16)** (2013), 181–195.

Spis cytowanych powyżej prac innych autorów.

[1] C. Aistleitner, *Lower bounds for the maximum of the Riemann zeta function along vertical lines*, Math. Ann. **365** (2016), no. 1-2, 473–496.

[2] B. Bagchi, *The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied dirichlet series*, Ph.D. Thesis, Calcutta, Indian Statistical Institute, 1981.

[3] B. Bagchi, *Recurrence in topological dynamics and the Riemann hypothesis*, Acta Math. Hungar. **50** (1987), no. 3-4, 227–240.

[4] U. Balakrishnan, *Extreme values of the Dedekind zeta function*, Acta Arith. **46** (1986), no. 3, 199–210.

[5] R. Balasubramanian, K. Ramachandra, *On the frequency of Titchmarsh's phenomenon for $\zeta(s)$. III*, Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A **86** (1977), no. 4, 341–351.

[6] H. Bauer, *The value distribution of Artin L-series and zeros of zeta-functions*, J. Number Theory **98** (2003), no. 2, 254–279.

[7] H. Bohr, R. Courant, *Neue Anwendungen der Theorie der Diophantischen Approximationen auf die Riemannsche Zetafunktion*, J. Reine Angew. Math. **144** (1914), 249–274.

[8] H. Bohr, B. Jessen, *Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion*, Acta Math. **54** (1930), no. 1, 1–35.

[9] H. Bohr, B. Jessen, *Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion*, Acta Math. **58** (1932), no. 1, 1–55.

[10] E. Bombieri, D. A. Hejhal, *On the distribution of zeros of linear combinations of Euler products*, Duke Math. J. **80** (1995), no. 3, 821–862.

[11] A. Bondarenko, K. Seip, *Large GCD sums and extreme values of the Riemann zeta function*, available at `https://arxiv.org/abs/1507.05840` (2015), 1–17.

[12] A. R. Booker, F. Thorne, *Zeros of L-functions outside the critical strip*, Algebra Number Theory **8** (2014), no. 9, 2027–2042.

[13] Y.-G. Chen, *The best quantitative Kronecker's theorem*, J. London Math. Soc. (2) **61** (2000), no. 3, 691–705.

[14] A. Dubickas, A. Laurinčikas, *Joint discrete universality of Dirichlet L-functions*, Arch. Math. (Basel) **104** (2015), no. 1, 25–35.

[15] R. Garunkštis, E. Karikovas, *Self-approximation of Hurwitz zeta-functions*, Funct. Approx. Comment. Math. **51** (2014), no. 1, 181–188.

[16] S. M. Gonek, *Analytic properties of zeta and l-functions*, Ph.D. Thesis, University of Michigan, 1979.

[17] A. Granville, K. Soundararajan, *Extreme values of $|\zeta(1+it)|$*, The Riemann zeta function and related themes: papers in honour of Professor K. Ramachandra, Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser., vol. 2, Ramanujan Math. Soc., Mysore, 2006, pp. 65–80.

[18] T. Hilberdink, *An arithmetical mapping and applications to Ω-results for the Riemann zeta function*, Acta Arith. **139** (2009), no. 4, 341–367.

[19] J. Kaczorowski, M. Kulas, *On the non-trivial zeros off the critical line for L-functions from the extended Selberg class*, Monatsh. Math. **150** (2007), no. 3, 217–232.

[20] J. Kaczorowski, A. Laurinčikas, J. Steuding, *On the value distribution of shifts of universal Dirichlet series*, Monatsh. Math. **147** (2006), no. 4, 309–317.

[21] J. Kaczorowski, A. Perelli, *On the structure of the Selberg class. I.* $0 \leqslant d \leqslant 1$, Acta Math. **182** (1999), no. 2, 207–241.

[22] A. Laurinčikas, K. Matsumoto, J. Steuding, *The universality of L-functions associated with newforms*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **67** (2003), no. 1, 83–98.

[23] A. Laurinčikas, *Universality of the Lerch zeta function*, Liet. Mat. Rink. **37** (1997), no. 3, 367–375.

[24] A. Laurinčikas, R. Macaitienė, D. Šiaučiūnas, *Uniform distribution modulo* 1 *and the joint universality of Dirichlet L-functions*, Lith. Math. J. **56** (2016), no. 4, 529–539.

[25] A. Laurinčikas, R. Matsaǐtene, *On the joint universality of periodic zeta functions*, Mat. Zametki **85** (2009), no. 1, 54–64.

[26] A. Laurinčikas, K. Matsumoto, *Joint value-distribution theorems on Lerch zeta-functions*, Liet. Mat. Rink. **38** (1998), no. 3, 312–326.

[27] A. Laurinčikas, K. Matsumoto, *The joint universality and the functional independence for Lerch zeta-functions*, Nagoya Math. J. **157** (2000), 211–227.

[28] A. Laurinčikas, K. Matsumoto, *Joint value-distribution theorems on Lerch zeta-functions. II*, Liet. Mat. Rink. **46** (2006), no. 3, 332–350.

[29] A. Laurinčikas, K. Matsumoto, *Joint value distribution theorems on Lerch zeta-functions. III*, Analytic and probabilistic methods in number theory, TEV, Vilnius, 2007, pp. 87–98.

[30] A. Laurinčikas, K. Matsumoto, J. Steuding, *Universality of some functions related to zeta-functions of certain cusp forms*, Osaka J. Math. **50** (2013), no. 4, 1021–1037.

[31] A. Laurinčikas, K. Matsumoto, J. Steuding, *Discrete universality of L-functions of new forms. II*, Lith. Math. J. **56** (2016), no. 2, 207–218.

[32] M. Lerch, *Note sur la fonction* $\mathfrak{k}(w,x,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi ix}}{(w+k)^s}$, Acta Math. **11** (1887), no. 1-4, 19–24.

[33] R. Lipschitz, *Untersuchung einer aus vier Elementen gebildeten Reihe*, J. Reine Angew. Math. **54** (1857), 313–328.

[34] H. Mishou, *Functional distribution for a collection of Lerch zeta functions*, J. Math. Soc. Japan **66** (2014), no. 4, 1105–1126.

[35] H. Mishou, *Joint universality theorems for pairs of automorphic zeta functions*, Math. Z. **277** (2014), no. 3-4, 1113–1154.

[36] H. L. Montgomery, *Extreme values of the Riemann zeta function*, Comment. Math. Helv. **52** (1977), no. 4, 511–518.

[37] H. Nagoshi, J. Steuding, *Universality for L-functions in the Selberg class*, Lith. Math. J. **50** (2010), no. 3, 293–311.

[38] T. Nakamura, *Applications of inversion formulas to the joint t-universality of Lerch zeta functions*, J. Number Theory **123** (2007), no. 1, 1–9.

[39] T. Nakamura, *The existence and the non-existence of joint t-universality for Lerch zeta functions*, J. Number Theory **125** (2007), no. 2, 424–441.

[40] T. Nakamura, *Joint value approximation and joint universality for several types of zeta functions*, Acta Arith. **134** (2008), no. 1, 67–82.

[41] T. Nakamura, *The joint universality and the generalized strong recurrence for Dirichlet L-functions*, Acta Arith. **138** (2009), no. 4, 357–362.

[42] H. S. A. Potter, *The mean values of certain Dirichlet series, I*, Proc. London Math. Soc. (2) **46** (1940), 467–478.

[43] A. Reich, *Universelle Werteverteilung von Eulerprodukten*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II (1977), no. 1, 1–17.

[44] A. Reich, *Werteverteilung von Zetafunktionen*, Arch. Math. (Basel) **34** (1980), no. 5, 440–451.

[45] M. Righetti, *Zeros of combinations of Euler products for $\sigma > 1$*, Monatsh. Math. **180** (2016), no. 2, 337–356.

[46] E. Saias, A. Weingartner, *Zeros of Dirichlet series with periodic coefficients*, Acta Arith. **140** (2009), no. 4, 335–344.

[47] A. Sankaranarayanan, J. Sengupta, *Omega theorems for a class of L-functions (a note on the Rankin-Selberg zeta-function)*, Funct. Approx. Comment. Math. **36** (2006), 119–131.

[48] A. Selberg, *Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series*, Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori, 1989), Univ. Salerno, Salerno, 1992, pp. 367–385.

[49] K. Soundararajan, *Extreme values of zeta and L-functions*, Math. Ann. **342** (2008), no. 2, 467–486.

[50] J. Steuding, *Extremal values of Dirichlet L-functions in the half-plane of absolute convergence*, J. Théor. Nombres Bordeaux **16** (2004), no. 1, 221–232.

[51] J. Steuding, *Value-distribution of L-functions*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1877, Springer, Berlin, 2007.

[52] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, second ed., The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986, Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.

[53] S. M. Voronin, *A theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **39** (1975), no. 3, 475–486, 703.

[54] S. M. Voronin, *Analytic properties of Dirichlet generating functions of arithmetic objects*, Ph.D. Thesis, Moscow, Steklov Math. Institute, 1977.

[55] M. Waldschmidt, *A lower bound for linear forms in logarithms*, Acta Arith. **37** (1980), 257–283.

Łukasz Pańkowski