Prof. dr hab. Marian Nowak
Instytut Matematyki
Uniwersytet Zielonogórski

Zielona Góra, 6 czerwca 2023 r.

# Recenzja

## rozprawy doktorskiej mgr Jakuba Tomaszewskiego

## Mnożniki punktowe i ich własności

Rozprawa doktorska mgr Jakuba Tomaszewskiego poświęcona jest badaniu przestrzeni mnożników punktowych $M(X,Y)$ pomiędzy parami ważnych klas krat Banacha $X$ i $Y$, w szczególności, pomiędzy parami przestrzeni Orlicza, przestrzeni Musielaka-Orlicza oraz przestrzeni Calderona-Łozanowskiego.

Przypomnijmy, że jeżeli $(X, \|\cdot\|_X)$ oraz $(Y, \|\cdot\|_X)$ są dwoma kratami Banacha nad tą samą przestrzenią miary $(\Omega, \Sigma, \mu)$ oraz $\operatorname{supp} X = \Omega$, to przestrzenią mnożników punktowych nazywamy zbiór

$$M(X,Y) := \{f \in L^0 : f\,g \in Y \text{ dla każdego } g \in X\},$$

zaopatrzony w normę operatorową $\|f\|_{M(X,Y)} := \sup\{\|f\,g\|_Y : \|g\|_X \le 1\}$.

W szczególności, wiadomo, że $M(X, L^1) = X'$, gdzie $X'$ jest przestrzenią dualną do $X$ w sensie Kothego.

Iloczynem punktowym $X \odot Y$ przestrzeni $X$ i $Y$ nazywamy zbiór

$$X \odot Y := \{h\,g \in L^0 : h \in X,\ g \in Y\},$$

wyposażony w quasi-normę $\|f\|_{X\odot Y} := \inf\{\|h\|_X\,\|g\|_Y : f = g\,h\}$.

W rozprawie rozważany jest również problem faktoryzacji przestrzeni $Y$ przez $X$, czyli problem kiedy zachodzi identyczność: $X \odot M(XY) = Y$. W szczególności, na mocy twierdzenia Łozanowskiego mamy: $X \odot M(X, L^1) = L^1$.

Recenzowana rozprawa składa się z czterech rozdziałów oraz bibliografii liczącej 78 pozycji, zawierające najnowsze prace i monografie dotyczące przestrzeni funkcyjnych oraz problematyki rozprawy.

W Rozdziale 1 (Preliminaria) Autor zamieszcza niezbędne oznaczenia, definicje i fakty dotyczące krat Banacha, przestrzeni symetrycznych, przestrzeni Orlicza, przestrzeni Musielaka-Orlica, przestrzeni Calderona-Łozanowskiego oraz przestrzeni mnożników punktowych oraz faktoryzacji przestrzeni $Y$ przez przestrzeń $X$. Bardzo to ułatwia lekturę rozprawy. Ponadto, Autor wskazuje na motywację i inspiracje badań podjętych w Rozprawie oraz dołącza interesujące uwagi historyczne dotyczące wcześniej uzyskanych wyników.

W Rozdziale 2 rozważany jest problem charakteryzacji przestrzeni mnożników punktowych pomiędzy przestrzeniami Orlicza $L^{\varphi}$ i $L^{\varphi_1}$, generowanymi przez funkcje

Younga $\varphi$ i $\varphi_1$. Głównym wynikiem tego rozdziału jest Twierdzenie 2.1.7, w którym wykazano, że dla funkcji Younga $\varphi$ i $\varphi_1$ zachodzi równość:

$$M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi \ominus \varphi_1},$$

gdzie $\varphi \ominus \varphi_1$ oznacza uogólnioną funkcję dopełniającą w sensie Younga funkcji $\varphi$ względem funkcji $\varphi_1$.

Ponadto w Twierdzeniu 2.2.1 podane są w terminach relacji między funkcjami Younga $\varphi$ i $\varphi_1$ warunki konieczne i dostateczne na to, aby przestrzeń $L^{\varphi_1}$ faktoryzowała się przez przestrzeń $L^{\varphi}$, tj. $L^{\varphi_1} \odot M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi}$.

W Rozdziale 3 uzyskano charakteryzacje mnożników punktowych $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi})$ między parami przestrzeni Musielaka-Orlicza $L^{\varphi_1}$ i $L^{\varphi}$ oraz mnożników punktowych $M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi})$ między przestrzeniami Calderona-Łozanowskiego $E_{\varphi_1}$ i $E_{\varphi}$. Głównym wynikiem tego rozdziału jest Twierdzenie 3.2.8, w którym wykazano, że jeżeli $\operatorname{supp} L^{\varphi_1} = \Omega$, to $M(L^{\varphi_1}, L^{\varphi}) = L^{\varphi \ominus \varphi_1}$. Dowód tego twierdzenia, poprzedzony Lematami 3.2.1 , 3.2.4 oraz 3.2.7 jest wysoce nie-trywialny i wymaga stosowania subtelnych technik wnikających głęboko w strukturę przestrzeni Musielaka-Orlicza.

Problem opisu przestrzeni mnożników punktowych $M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi})$ został zainicjowany przez Kolwicza, Leśnika i Maligrandę w 2013 roku. W Twierdzeniu 3.3.2 wykazano, że $M(E_{\varphi_1}, E_{\varphi}) = E_{\varphi \ominus \varphi_1}$ przy pewnych warunkach na funkcje Younga $\varphi$ i $\varphi_1$. Z kolei, w Twierdzeniu 3.4.1 podano warunki konieczne i dostateczne na faktoryzację pary przestrzeni Calderona-Łozanowskiego $E_{\varphi_1}$ oraz $E_{\varphi}$.

W Rozdziale czwartym badana jest słaba zwartość w dowolnych funkcyjnych kratach Banacha. Uzyskano rozszerzenia klasycznych kryteriów słabej zwartości zbiorów w przestrzeni $L$ typu Dunforda-Pettisa oraz de la Valle Poussina na funkcyjne kraty Banacha. W szczególności, w Twierdzeniu 4.2.3 wykazano, że funkcyjna krata Banacha spełnia kryterium Dunford-Pettisa wtedy i tylko wtedy, gdy $X$ jest 1-rozłącznie jednorodna. Jako zastosowanie Twierdzenie 4.2.3, w przypadku, gdy krata Banacha $Y$ jest 1-rozłacznie jednorodna, uzyskano w Twierdzeniu 4.3.2 interesującą charakteryzację słabej zwartości operatora mnożenia punktowego $M_f : X \to Y$.

Warto zaznaczyć, że część wyników rozprawy jest zawarta w trzech artykułach współautorskich, opublikowanych w bardzo dobrych czasopismach matematycznych (pozycje [48], [50] oraz [51] w bibliografii rozprawy). Ponadto jedna praca współautorska jest w przygotowaniu.

Rozprawa jest bardzo starannie zredagowana. Autor doskonale poradził sobie z prezentacją dużej liczby pojęć, oznaczeń oraz skomplikowanych rozumowań. Warto również podkreślić, że Autor zamieszcza motywacje i historyczne uwarunkowania prowadzonych badań oraz skrupulatnie wskazuje na wcześniejsze rezultaty dotyczące głównych wyników uzyskanych w rozprawie. Zamieszczone są liczne interesujące i nietrywialne przykłady, wskazujące na głębokie zrozumienie przez Autora problematyki krat Banacha. Nie zauważyłem istotnych usterek językowych i redakcyjnych, poza drobnymi usterkami typograficznymi.

**Ocena merytoryczna rozprawy.** Uważam, że recenzowana rozprawa doktorska jest interesującym i oryginalnym wkładem do teorii krat Banacha, w szczególności do problematyki mnożników punktowych i problemu faktoryzacji krat Banacha. Problematyka rozprawy mieści się w ważnym nurcie badań prowadzonych, między innymi, przez takich matematyków jak Ando, Łozanowski, O'Neil, Nakai, Płuciennik, Kolwicz, Maligranda, Leśnik. Zawarte w rozprawie rezultaty są głębokie i merytorycznie poprawne. Chciałbym podkreślić, że uzyskanie wyżej wymienionych rezultatów wymagało od Autora sprawnego stosowania skomplikowanych technik dowodowych.

**Konkluzja.** Jednoznacznie stwierdzam, że rozprawa doktorska mgr Jakuba Tomaszewskiego w pełni spełnia wymagania określone w Ustawie o stopniach i tytule naukowym. Wnioskuję o dopuszczenie mgr Jakuba Tomaszewskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego i nadanie Mu stopnia naukowego doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w zakresie dyscypliny matematyka.

Ponadto, biorąc pod uwagę powyżej wymienione walory rozprawy, uważam, że rozprawa doktorska mgr. Jakuba Tomaszewskiego zasługuje na wyróżnienie.

Nowak