Recenzja rozprawy doktorskiej pani Anny Golińskiej "The classical operators on the space of real analytic functions"

Rozprawa doktorska pani Anny Golińskiej poświęcona jest badaniu własności operatorów liniowych działających na przestrzeni funkcji rzeczywiście analitycznych na prostej rzeczywistej. Jest to bardzo ciekawa przestrzeń liniowo topologiczna głęboko związania z teorią funkcji analitycznych. Renesans jej popularności przyniosły głębokie rezultaty pierwszego promotora pani Golińskiej, przedwcześnie zmarłego Pawła Domańskiego. W szczególności w swoich pracach (wspólnie z M. Langenbruchem i D. Vogtem) położył on podwaliny pod wyniki recenzowanej pracy. W szczególności wyniki te dają kryteria pozwalające na reprezentacje operatorów ciągłych w terminach funkcji holomorficznych.

Przestrzeń funkcji rzezczywiście analitycznych wyposażona w topologię indukowaną przez przestrzenie funkcji analitycznych na otoczeniach prostej jest przestrzenią beczkową, ultrabornologiczną, refleksywną i nuklearną. Nie posiada ona bazy Schaudera (co pokazali Domański z Vogtem) jednak jednomiany stanowią jej namiastkę (z uwagi na gęstość wielomianów). Można zatem w sposób naturalny rozpatrywać klasyczne operatory w odniesieniu do systemu jednomianów. W szczególności operatory mnożnikowe (tu zwane mnożnikami Hadamarda), operatory Hankela i operatory Toeplitza. Takim właśnie klasycznym operatorom poświęcona jest praca pani Golińskiej.

Praca składa się ze wstępu oraz czterech rozdziałów. Pierwszy poświęcony jest definicjom oraz przypomnieniu podstawowych własności przestrzeni funkcji rzeczywiście analitycznych.

Drugi rozdział poświęcony jest badaniu mnożników Hadamarda. Przedstawiona jest charakteryzacja (należąca do Domańskiego i Langenbrucha) mnożników Hadamarda w terminach funkcji holomorficznych w zerze posiadających rozszerzenie na dopełnienie prostej rzeczywistej. Pozostała część rozdziału poświęcona jest dociekaniom kiedy mnożnik hadamardowski generuje ciągłą półgrupę operatorów. Podane jest kryterium - ograniczoność "symboli" elementów grupy z pewnego otoczenia zera. Jako zatosowanie scharakteryzowano operatory różniczkowe Eulera skończonego stopnia, które generują ciągłe półgrupy. Ostatni paragraf pierwszego rozdziału poświęcony jest dowodowi faktu, że operator Hardy'ego generuję ciągłą półgrupę operatorów. Dowód w bardzo elegancki sposob wykorzystuje transformatę Mellina.

Trzeci rozdział rozprawy poświęcony jest operatorom Hankela. Wychodząc od całkowej reprezentacji operatorów Hankela (wykorzystującej wzór

Cauchy'ego) dowodzi się, że operatory Hankela są we wzajemnej (topologicznej) odpowiedniości z funkcjami całkowitymi na płaszczyznie zespolonej oraz bada ich podstawowe własności (kiedy operator jest skończenie wymiarowy - gdy jego symbol jest wielomianem).

Ostatni paragraf trzeciego rozdziału poświęcony jest zbudowaniu paraleli między operatorami Hankela na przestrzeni funkcji rzeczywiście analitycznych oraz operatorami Hankela na przestrzeni Hardy'ego z drugą normą. Dowodzi się w nim, używając analizy widm operatorow, że symbol ograniczonego operator Hankela na przestrzeni funkcji rzeczywiście analitycznych generuje ograniczony operator Hankela na przestrzeni Hardy'ego. Jednak z faktu że symbol jest funkcją całkowitą łatwo wynika, iż należy do każdej przestrzeni Besova. Teraz korzysta się z (klasycznego już) wyniku Pellera, że operator Hankela na przestrzeni Hardy'ego którego symbol należy do przestrzeni Besova należy do odpowiedniej klasy Schattena do dowodu, że ciąg wartości własnych jest sumowalny z dowolną potęgą. Ten bardzo elegancki dowód jest kulminacją rozdziału trzeciego.

Czwarty i ostatni rozdział rozprawy poświęcony jest analizie własności operatorów Toeplitza. Rozpoczyna się od opisu przestrzeni symboli jako granicy induktywnej przestrzeni funkcji holomorficznych na obszarach zawierających prostą rzeczywistą i rozłącznych ze zwartymi podzbiorami prostej. Następnie, po przypomnieniu kryteriów (pochodzących od Domańskiego i Jasiczka) na bycie operatorem Fredholma (oraz operatorem odwracalnym) dowodzi się, że operatory Toeplitza są fredholmowskie, gdy dopuszczają faktoryzacje Wienera - Hopfa w przestrzeni symboli (rezultat wzorowany na analogicznym twierdzeniu Simonenki dotyczącym operatorów Toeplitza na ważonych przestrzeniach Hardy'ego na krzywych).

Kolejny paragraf ostatniego rozdziału poświęcony jest odwracalności operatorów Toeplitza. Dowodzi się w nim, że operator Toeplitza ma lewy odwrotny wtedy i tylko wtedy, gdy jest iniektywnym operatorem Fredholma oraz ma prawy odwrotny wtedy i tylko wtedy, gdy jest surjektywnym operatorem Fredholma. Dowody powyższych własności opierają się na charakteryzacji (należącej do Jasiczka) możliwych zbiorów zerowych symbolu i zależnych od nich własności jądra i obrazu. Wykorzystując informacje o lokalizacji zer symbolu (twierdzenie Weierstrassa) oraz metody analizy zespolonej dowodzi się własności operatora sprzężonego prowadzących do charakteryzacji odwracalności.

Ostatnia część czwartego rozdziału rozprawy poświęcona jest badaniu własności komutatorów operatorów Toeplitza (przy okazji również operatorów Hankela). Bardziej precyzyjne - przedstawiona jest charakteryzacja tych par operatorów Toeplitza na przestrzeni funkcji rzeczywiście analitycznych, których komutator jest operatorem skończenie wymiarowym. Rozumowanie z tej części rozprawy jest w dużej mierze wzorowane na pracy Dinga i Zhenga traktującej o podobnym problemie dla operatorów Toeplitza na przestrzeni Hardy'ego. Wykorzystując tożsamości algebraiczne wiążące złożenia operatorów Toeplitza i Hankela, charakteryzacje skończenie wymiarowych operatorów Hankela, dowodzi się warunków koniecznych i dostatecznych na skończony wymiar komutatorów operatorów Toeplitza w terminach lokalizacji osobliwości ich symboli.

Wyniki z rozprawy pani Golińskiej są już częściowo opublikowane w Ann. Polon. Math. oraz J. Math. Anal. Appl. Niewątpliwie są one wynikiem intensywnej współpracy z oboma promotorami - zarówno z Pawłem Domańskim jak i Michałem Jasiczakiem. Ich rezultaty są punktem wyjścia dla teorii rozwijanej w rozprawie, ale również twierdzenia w niej zawarte są częstokroć współautorskie. Osobiście nie sądzę by to była wada rozprawy. Umiejętność współpracy jest jednym z najważniejszych przymiotów cechujących dobrego matematyka.

Praca jest bardzo dobrze napisana. Zawiera przystępne wprowadzenie i raczej dość kompletnie opisuje aktualny stan wiedzy o przestrzeni funkcji rzeczywiście analitycznych. Czyta się ją bardzo dobrze - w szczególności dobrze widać idee stojące za dowodami.

Lekki niedosyt budzi niekompletność rezultatów dotyczących ciągłych półgrup generowanych przez mnożniki Hadamarda. Wydaje się, że jest tu przestrzeń na owocną kontynuację badań. W każdym razie daleko jest jeszcze do twierdzeń charakteryzujących. Ogólnie jednak moje wrażenie z czytania rozprawy jest bardzo pozytywne. Jest to matematyka ciekawa, zahaczająca o delikatne własności teorii funkcji zespolonych. Napisana językiem dojrzałym, świadczącym o osiągnięciu przez panią Anne Golińską znacznego stopnia rozwoju matematycznego. Wszystkie części rozprawy zawierają ciekawe rezultaty, a niektóre otwierają przestrzeń do dalszych badań.

Podsumowując uważam że praca z naddatkiem spełnia wymagania stawiane rozprawie doktorskiej i wnioskuję o nadanie pani Annie Golińskiej stopnia naukowego doktora.

Michał Wojciechowski