Prof. dr hab. Marian Nowak
Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii
Uniwersytet Zielonogórski

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Agaty Panfil**

**Lokalna struktura geometryczna wybranych funkcyjnych przestrzeni Banacha**

**dla**
**Rady Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza**

Geometria przestrzeni Banacha została zapoczątkowana przez Clarksona w 1936 roku w pracy „ Uniformly convex spaces" i od tego czasu była intensywnie rozwijana. W przypadku, gdy przestrzeń Banacha nie posiada odpowiedniej własności globalnej powstaje naturalny problem badania własności lokalnych tej przestrzeni, to znaczy badania tych własności dla ustalonego punktu tej przestrzeni. Globalne i lokalne własności przestrzeni Banacha były intensywnie badane a ich wyniki znalazły zastosowania między innymi w teorii aproksymacji, teorii punktów stałych i teorii optymalizacji.

Rozprawa doktorska mgr Agaty Panfil mieści się w tym nurcie badań i dotyczy badania lokalnej struktury geometrycznej ważnych klas symetrycznych funkcyjnych przestrzeni Banacha , w szczególności: przestrzeni Lorentza $\Gamma_{p,w}$ i $\Lambda_{p,w}$ , przestrzeni Orlicza-Lorentza $\Lambda_{p,\varphi}$ oraz uogólnionych przestrzeni Calderona-Łozanowskiego $E_\varphi$ .Tematyka rozprawy dobrze wkomponuje się w badania Poznańskiej Szkoły Geometrii Przestrzeni Banacha reprezentowanej między innymi przez H. Hudzika, M. Mastyło, R. Płuciennika i P. Kolwicza.

Licząca 97 stron rozprawa składa się ze wstępu, 3 rozdziałów oraz spisu literatury.

W Rozdziale 1 wprowadzone są w uporządkowany sposób oznaczenia i podstawowe pojęcia stosowane w pracy. W szczególności zdefiniowane są pojęcia dotyczące lokalnych własności geometrycznych w przestrzeniach funkcyjnych oraz odpowiednich własności globalnych. Ułatwia to czytelnikowi lekturę tej rozprawy.

W Rozdziale 2 rozważane są własności geometryczne przestrzeni symetrycznych.
Podrozdział 2.1 zawiera wyniki dotyczące struktury lokalnej funkcyjnych symetrycznych przestrzeni Banacha. Badane są zależności między własnościami elementu x i jego nierosnącego przedstawienia $x^*$ . Interesującymi przykładami są tutaj Twierdzenie 2.30 ( odp. Twierdzenie 2.31) ustalające , że punkt x symetrycznej funkcyjnej przestrzeni Banacha jest punktem dolnej monotoniczności ( odp. górnej monotoniczności ) wtedy i tylko wtedy gdy $x^*$ jest punktem dolnej monotoniczności ( górnej monotoniczności). Do podobnego kręgu zagadnień należą również wyniki zawarte w Lematach 2.34 oraz 2.36 i w szczególności Wniosku 2.39, gdzie pokazano, że punkt x punktem dolnej lokalnej jednostajnej monotoniczności ( odp. górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności ) wtedy i tylko wtedy , gdy punkt $x^*$ jest punktem dolnej lokalnej jednostajnej monotoniczności (odp. górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności ).

Z kolei, w Podrozdziale 2.2 uzyskano charakteryzacje punktów porządkowej ciągłości (Twierdzenie 2.44) oraz punktów monotoniczności ( Twierdzenie 2.45 oraz Twierdzenie 2.47) w przestrzeniach Lorentza $\Gamma_{p,w}$ i $\Lambda_{p,w}$ dla $1 < p < \infty$.

Następnie, w Podrozdziale 2.3. zaprezentowane są zastosowania wyników z Podrozdziału 2.2 w badaniu lokalnej struktury przestrzeni Orlicza-Lorenza $\Lambda_{p,\varphi}$. Uzyskano tutaj charakteryzacje punktów dolnej monotoniczności , górnej monotoniczności, dolnej lokalnej jednostajnej monotoniczności i górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności. Prezentowane tutaj wyniki uogólniają rezultaty W. Gonga i Z. Shi na szerszą klasę funkcji Orlicza i przedziału I. Jako zastosowanie uzyskano znane kryterium ścisłej wypukłości przestrzeni Lorentza $\Gamma_{p,w}$, udowodnione prze Ciesielskiego, Kamińską, Kolwicza i Płuciennika [13]w 2012 roku.

W Podrozdziale 2.4 rozważane są punkty niekwadratowości w przestrzeniach Lorentza $\Gamma_{p,w}$ . Podane są warunki konieczne i dostateczne dla punktu niekwadratowości w przestrzeniach Lorentza $\Gamma_{p,w}$ przy uwzględnieniu własności funkcji wagowej $w$ oraz rodzaju przedziału I. Na szczególną uwagę zasługuje tutaj cykl twierdzeń: 2.59; 2.60; 2.61; 2.62; 2.63, których dowody wymagały rozważenia wielu przypadków i pokonania sporych trudności technicznych.

Podrozdział 2.5 poświęcony jest badaniu problemu najlepszej lokalnej zdominowanej aproksymacji siatek Banacha oraz przestrzeni symetrycznych.

W Rozdziale 3 badane są własności geometryczne uogólnionych przestrzeni Calderona-Łozanowskiego. W szczególności rozważany jest tzw. warunek $\Delta_2$ (x) służący dla badania porządkowej ciągłości elementu uogólnionej przestrzeni Calderona-Łozanowskiego $E_\varphi$ . W Twierdzeniu 3.22 uzyskano charakteryzacje tej własności dla elementu x przestrzeni $E_\varphi$ . Dowód tego twierdzenia poprzedzony kilkoma lematami jest wysoce nietrywialny i wymaga dobrej znajomości teorii przestrzeni Orlicza i teorii miary.

Rozprawę kończy spis literatury zawierający 67 pozycji, w tym najnowsze prace i monografie dotyczące geometrii przestrzeni Banacha i teorii aproksymacji.

Warto podkreślić, że część wyników rozprawy powstała na postawie współ-autorskich publikacji [15, 51, 52, 53] mgr Agaty Panfil oraz promotora, prof. Pawła Kolwicza i promotora pomocniczego, dr Macieja Ciesielskiego.

Reasumując, uważam, że tematyka ocenianej rozprawy doktorskiej mieści się w ważnym nurcie badań geometrii przestrzeni Banacha a otrzymane wyniki nawiązują do aktualnie prowadzonych badań w tej dziedzinie. Rozprawa jest obszernym i wartościowym wkładem do geometrii przestrzeni funkcyjnych. Autorka dobrze opanowała subtelne techniki dowodowe oraz wykazała się znajomością złożonych zależności między różnymi własnościami geometrycznymi przestrzeni Banacha. Błędów merytorycznych nie zauważyłem. Recenzowana rozprawa jest starannie zredagowana. Nie zauważyłem istotnych usterek językowych i redakcyjnych.

*Uważam, że recenzowana rozprawa doktorska odpowiada warunkom określonych w Ustawie z dnia 18 marca 2011 r. o zmianie ustawy - Prawo o szkolnictwie wyższym, ustawy o stopniach naukowych oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki i uzasadnia nadanie mgr Agacie Panfil stopnia naukowego doktora nauk matematycznych. Wnioskuję o dopuszczenie mgr Agaty Panfil do dalszych etapów przewodu doktorskiego.*

Zielona Góra, 20.11.2016r.

Nowak