Opinia o rozprawie doktorskiej mgra Michała Rzeczkowskiego zatytułowanej "Operatory kompozycji i miary Carlesona w teorii przestrzeni Hardy'ego-Orlicza na obszarach"

Przestrzenie Hardy'ego funkcji analitycznych w kole jednostkowym $\mathbb{D}$ na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$ inspirują matematyków już od stu lat. Gdy pojawiły się przestrzenie Orlicza jako uogólnienia przestrzeni typu L^p występujących w definicji przestrzeni Hardy'ego, to w konsekwencji musiały się też pojawić przestrzenie Hardy'ego-Orlicza. Ich badania na kole $\mathbb{D}$ zapoczątkował w latach 60. ubiegłego wieku poznański matematyk Ryszard Leśniewicz. W omawianej pracy doktorskiej autor bada takie przestrzenie w kontekście własności działających na nich operatorów, głównie operatora kompozycji. Nawiązuje w ten sposób do cyklu wspólnych prac z ostatnich kilku lat czwórki matematyków: P. Lefèvre'a, D. Li, H. Queffélеca i L. Rodrigueza-Piazzy (w skrócie L-L-Q-R), inspirując się szczególnie pracą [32] z bibliografii. Wiele ich wyników uzyskanych na kole $\mathbb{D}$ przenosi doktorant na obszary kołowe na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$ (obszarem kołowym nazywa autor obszar powstały przez wyrzucenie z koła $\mathbb{D}$ skończonej ilości zawartych w nim domkniętych i parami rozłącznych kół). Należy podkreślić, że te "przenosiny" są dalece nietrywialne i wymagały zarówno szerokiej wiedzy autora w zakresie teorii funkcji analitycznych, topologii i analizy funkcjonalnej, jak i bardzo dobrego opanowania zaawansowanych technik liczeniowych. Przejdźmy do podstawowych definicji i najważniejszych wyników rozprawy. Za autorem, ograniczymy się dalej do przestrzeni Hardy'ego-Orlicza na uogólnionych obszarach kołowych, czyli na podobszarach Ω płaszczyzny $\mathbb{C}$, dla których $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \cdots \cup \Gamma_m$, gdzie Γ_j są analitycznymi, parami rozłącznymi krzywymi Jordana. Niech $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją Orlicza, czyli funkcją niemalejącą, zerującą się tylko w 0 i taką, że $\lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = +\infty$. Załóżmy dodatkowo, że funkcja $t \to \Phi(e^t)$ jest wypukła. Wtedy dla każdej funkcji f z przestrzeni $H(\Omega)$ funkcji holomorficznych w Ω funkcja $\Phi(|F|)$ jest subharmoniczna w Ω, co pozwala zdefiniować *przestrzeń Hardy'ego-Orlicza* $H^\Phi(\Omega)$ metodą Rudina: jest to przestrzeń tych funkcji $f \in H(\Omega)$, dla których istnieje stała $\varepsilon > 0$ i funkcja harmoniczna ν na Ω takie, że $\Phi(|f(z)|/\varepsilon) \leq \nu(z)$ dla $z \in \Omega$. Niech $\nu_{f,\varepsilon}$ będzie najmniejszą harmoniczną majorantą funkcji $\Phi(|f|/\varepsilon)$ na Ω. Załóżmy dodatkowo, że istnieje stała $K > 0$ taka, że $\Phi(t/2K) \leq \frac{1}{2}\Phi(t)$ dla $t > 0$ i ustalmy dowolnie punkt $z_0 \in \Omega$. Wtedy funkcjonał

$$\|f\|_{z_0} := \inf\{\varepsilon > 0 : \nu_{f,\varepsilon}(z_0) \leq 1\}$$

jest quasi-normą na przestrzeni $H^\Phi(\Omega)$ (normą, gdy funkcja Φ jest wypukła), przy czym

$$\|f + g\|_{z_0} \leq K\left(\|f\|_{z_0} + \|g\|_{z_0}\right), \quad f, g \in H^\phi(\Omega).$$

Ponadto, wobec nierówności Harnacka, jeśli z_1 jest innym punktem obszaru Ω, to quasi-normy $\|\cdot\|_{z_0}$ i $\|\cdot\|_{z_1}$ na H^Φ są równoważne. Ważnym narzędziem w rozprawie jest wykazana przez autora reprezentacja przestrzeni $H^\Phi(\Omega)$ w postaci sumy prostej, w przypadku, gdy funkcja Φ jest wypukła (**Twierdzenie 2.3**): dowolna funkcja $f \in H^\Phi(\Omega)$ daje się przedstawić w postaci $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_m$, gdzie $f_0 \in H^\Phi(E_0)$ oraz $f_k \in H_0^\Phi(E_k)$ (podprzestrzeń przestrzeni $H^\Phi(E_k)$ złożona z funkcji znikających w punkcie ∞)dla $k = 1, \ldots, m$. (Jeśli $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_m$, to E_0 oznacza ograniczoną składową zbioru $\mathbb{C} \setminus \Gamma_0$, natomiast E_k jest nieograniczoną składową zbioru $\mathbb{C} \setminus \Gamma_k$ dla $k = 1, \ldots, m$.) Ponadto, każde odwzorowanie $f \to f_l$ jest ograniczoną projekcją przestrzeni $H^\Phi(\Omega)$ na $H^\Phi(E_l)$, $l = 0, 1, \ldots, m$. Przy pomocy powyższego rozkładu uzyskuje doktorant ważny rezultat typu wzoru całkowego Cauchy'ego (**Twierdzenie 2.6**): przy założeniach Twierdzenia 2.3, dla dowolnego $f \in H^\Phi(\Omega)$ istnieje funkcja $f^* \in L^\Phi(\partial\Omega, \omega)$ (funkcja brzegowa funkcji f) taka, że

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f^*(w)}{w - z}dw, \ z \in \Omega, \quad 0 = \int_{\partial\Omega} \frac{f^*(w)}{w - z}dw, \ z \notin \bar{\Omega}$$

oraz $f(z) = \int_{\partial\Omega} f^*(\zeta)d\omega_z(\zeta)$, $z \in \Omega$. (Tutaj $L^\Phi(\partial\Omega, \omega)$ jest przestrzenią Orlicza na brzegu $\partial\Omega$ z miarą harmoniczną ω (względem dowolnie ustalonego punktu $p \in \Omega$), natomiast ω_z oznacza miarę harmoniczną na $\partial\Omega$ względem punktu $z \in \Omega$.) Ponadto, odwzorowanie $f \to f^*$ jest izometrycznym izomorfizmem przestrzeni $H^\Phi(\Omega)$ na domkniętą podprzestrzeń przestrzeni $L^\Phi(\partial\Omega, \omega)$ oraz jest izometrią z przestrzeni $HM^\Phi(\Omega)$ (domknięcie przestrzeni Hardy'ego $H^\infty(\Omega)$ w topologii przestrzeni $H^\Phi(\Omega)$) na domkniętą podprzestrzeń przestrzeni $L^\Phi(\partial\Omega, \omega)$. Opis podprzestrzeni przestrzeni $L^\Phi(\partial\Omega, \omega)$ izomorficznej z przestrzenią $H^\Phi(\Omega)$ w rozważanym wyżej przypadku jest na ogół trudny. Sytuacja upraszcza się w przypadku, gdy Ω jest pierścieniem $\mathbb{A} := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$. Wtedy funkcja brzegowa f^* funkcji $f \in H^\Phi(\mathbb{A})$ ma na okręgu $\partial\mathbb{D}$ rozwinięcie w szereg Fouriera $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$, $t \in \mathbb{T}$, gdzie a_n są współczynnikami szeregu Laurenta funkcji f w $\mathbb{A}$ (**Twierdzenie 2.10**, wzorowane na wyniku Sarasona dla przestrzeni Hardy'ego na dysku $\mathbb{D}$).

W rozdziale 3 rozprawy autor opisuje *powłoki Banacha* przestrzeni $H^\Phi(\mathbb{A})$ (czyli uzupełnienia przestrzeni $H^\Phi(\mathbb{A})$ rozpatrywanej z topologią generowaną przez funkcjonał Minkowskiego wypukłej powłoki kuli jednostkowej w $H^\Phi(\mathbb{A})$) poprzez izomorfizmy z odpowiednią przestrzenią wagową Bergmana funkcji holomorficznych w pierścieniu $\mathbb{A}$ (**Twierdzenie 3.6**). Zakłada tym razem, że funkcja Orlicza Φ spełnia warunek $\Delta(\alpha, \beta)$, gdzie $1 < \alpha \leq \beta < 1$, czyli gdy dla każdych $t \geq 0$ i $\lambda \geq 1$, $\lambda^\alpha\Phi(t) \leq \Phi(\lambda t) \leq \lambda^\beta\Phi(t)$ oraz funkcja $t \to \Phi(t^{1/\alpha})$ jest wypukła. Przy pomocy tego twierdzenia, autor opisuje przestrzenie dualne do $H^\Phi(\mathbb{A})$

poprzez ich izomorfizm z odpowiednią przestrzenią wagową Bergmana (**Twierdzenie 3.7**). Wyniki te uogólniają rezultaty Boyda z roku 1976 uzyskane dla przestrzeni Hardy'ego $H^p(\mathbb{A})$ $(0 < p < 1)$. Ze względu na technicznie skomplikowany opis przestrzeni wagowych Bergmana, szczegóły pominę.

Najciekawsze, moim zdaniem, wyniki rozprawy zawarte są w jej rozdziale 4 i dotyczą charakteryzacji *zwartych operatorów kompozycji* $C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$ danych wzorem $C_\varphi(z) := (f \circ \varphi)(z)$, $z \in \Omega$, gdzie $\varphi : \Omega \to \Omega$ jest odwzorowaniem holomorficznym. Zakłada się tutaj, że funkcja Orlicza Φ jest wypukła, a Ω jest obszarem kołowym. Pierwszym krokiem jest opis zwartości operatora inkluzji $j_\mu : H^\Phi(\Omega) \hookrightarrow L^\Phi(\overline{\Omega}, \mu)$, gdzie μ jest skończoną miarą borelowską na $\overline{\Omega}$ (**Twierdzenie 4.4**). Dalej głównym narzędziem jest *funkcja Carlesona* (dla $0 < h < \min_{i \neq j} \operatorname{dist}(\Gamma_i, \Gamma_j)$)

$$\rho_\mu(h) := \max_{0 \le i \le m} \sup_{\xi \in \Gamma_i} \mu(W_i(\xi, h)),$$

gdzie $W_i(\xi, h)$ są podzbiorami $\overline{\Omega}$ zwanymi *oknami Carlesona*, oraz funkcje

$$K_\mu(h) := \sup_{0<t\le h} \frac{\rho_\mu(t)}{t} \text{ i } \gamma_A(h) := \frac{1}{\Phi(A\Phi^{-1}(\frac{1}{h})},$$

gdzie $A > 0$. Przy ich pomocy autor definiuje warunki:
(R_0) $\lim_{h\to 0^+} \frac{\rho_\mu(h)}{\gamma_A(h)} = 0$ dla każdego $A > 0$;
(K_0) $\lim_{h\to 0^+} \frac{hK_\mu(h)}{\gamma_A(h)} = 0$ dla każdego $A > 0$;
(C_0) operator inkluzji $j_\mu : H^\Phi(\Omega) \hookrightarrow L^\Phi(\overline{\Omega}, \mu)$ jest zwarty,

i dowodzi implikacji $(K_0) \Longrightarrow (C_0) \Longrightarrow (R_0)$. Na ogół implikacje odwrotne nie zachodzą, co pokazali L-L-Q-R w przypadku koła $\mathbb{D}$. Tak jednak jest, gdy funkcja Orlicza Φ spełnia warunek Δ_2 (istnieją $x_0 > 0$ i $K > 1$ takie, że dla dowolnego $x \ge x_0$ jest $\Phi(2x) \le K\Phi(x)$). W szczególności otrzymuje stąd autor pełną charakteryzację zwartości inkluzji $j_\mu : H^p(\Omega) \hookrightarrow L^p(\overline{\Omega}, \mu)$, gdy $1 \le p < \infty$.

Gdy funkcja Orlicza Φ spełnia warunek ∇_2 (istnieją $\beta > 1$ i $x_0 > 0$ takie, że $\Phi(\beta x) \ge 2\beta\Phi(x)$ dla $x \ge x_0$), to okazuje się, że warunki (C_0), (R_0) i (K_0) są równoważne dla miary $\mu = \mu_\varphi$ określonej na σ-algebrze $\mathcal{B}(\overline{\Omega})$ zbiorów borelowskich w $\overline{\Omega}$ wzorem $\mu_\varphi(B) := s\left((\varphi^*)^{-1}(B)\right)$ dla $B \in \mathcal{B}(\overline{\Omega})$, gdzie $\varphi : \Omega \to \Omega$ jest ustalonym odwzorowaniem holomorficznym z funkcją brzegową $\varphi^* \in L^\Phi(\partial\Omega, ds)$. Dowód tego faktu opiera się na **Twierdzeniu 4.11**: istnieje taka stała $k > 0$, że dla dowolnego odwzorowania holomorficznego $\varphi : \Omega \to \Omega$ i dowolnego $\xi_i \in \Gamma_i$, $0 \le i \le m$ zachodzi nierówność $\mu_\varphi(W_i(\xi_i, \varepsilon h)) \le k\varepsilon\mu_\varphi(Wi(\xi_i, h))$ dla $\varepsilon \in (0, 1)$ i dostatecznie małych h, gdzie $W_i(\cdot, \cdot)$ są wspomnianymi wyżej oknami Carlesona. Stąd już nietrudno wyprowadzić **Wniosek 4.13**: operator kompozycji $C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(*) \qquad \lim_{s\to 1^-} \sup_{p\in\partial\mathbb{D}} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{1-s}\right) \|C_\varphi u^i_{p,s}\|_{H^\Phi(\Omega)} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m,$$

gdzie $u^i_{p,s}$ są standardowymi funkcjami dla obszaru kołowego Ω opisanymi na str. 27 rozprawy.

Inną charakteryzację zwartości operatora C_φ otrzymuje autor dzięki pokazaniu, że funkcja Carlesona jest równoważna (uogólnionej) *funkcji liczącej Nevanlinny* $N^\Omega_\varphi(w) := \sum_{\varphi(z)=w} g_\Omega(z,p)$, gdzie $g_\Omega(\cdot,p)$ jest funkcją Greena obszaru kołowego Ω z biegunem w punkcie $p \in \Omega$ (**Twierdzenie 4.14**): istnieje stała $K > 0$ taka, że dla każdego odwzorowania holomorficznego $\varphi : \Omega \to \Omega$

$$(1/K)\rho_\varphi(h/K) \le \sup\{N^\Omega_\varphi(w) : \operatorname{dist}(w, \partial\Omega) < h\} \le K\rho_\varphi(Kh)$$

dla dostatecznie małych h. Równoważność ta prowadzi do następującego wyniku (**Twierdzenie 4.16**): zwartość operatora C_φ jest równoważna każdemu z dwóch poniższych warunków

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\Phi^{-1}(1/h)}{\Phi^{-1}(1/\nu_\varphi(h))} = 0; \quad \lim_{w\to\partial\Omega} \frac{\Phi^{-1}(1/\operatorname{dist}(w,\partial\Omega))}{\Phi^{-1}(1/N^\Omega_\varphi(w))} = 0.$$

(W pierwszym warunku $\nu_\varphi(h) := \sup\{N^\Omega_\varphi(w) : \operatorname{dist}(w,\partial\Omega) < h\}$.) Co więcej (**Twierdzenie 4.17**), jeśli φ jest skończenie wartościowa, to każdy z powyższych warunków jest równoważny prostszemu:

$$\lim_{z\to\partial\Omega} \frac{\Phi^{-1}(1/\operatorname{dist}(\varphi(z),\partial\Omega))}{\Phi^{-1}(1/\operatorname{dist}(z,\partial\Omega))} = 0.$$

W końcowej części rozdziału 4 doktorant bada własności *słabej zwartości*, *porządkowej ograniczoności* i *zupełnej ciągłości* operatorów kompozycji. Odnotuję tutaj **Twierdzenie 4.30**: jeśli istnieje takie $\alpha > 1$, że $(\Phi(x))^2 \le \Phi(\alpha x)$ dla dużych x, to następujące warunki są równoważne:
(i) C_φ jest operatorem zwartym;
(ii) operator $\widetilde{C_\varphi} f := (C_\varphi f)^*$ jest porządkowo ograniczony;
(iii) operator C_φ jest słabo zwarty;
(iv) zachodzi warunek $(*)$.

Rozprawę kończy ciekawy rezultat dotyczący operatorów zupełnie ciągłych czyli przekształcających ciągi słabo zbieżne w ciągi zbieżne podług normy), inaczej, operatorów z *własnością Dunforda-Pettisa*. Wiadomo, że operatory zwarte mają tę własność. Implikacja odwrotna na ogół nie zachodzi. Doktorant pokazuje jednak (**Wniosek 4.33**), że jeśli funkcja Orlicza Φ spełnia warunek ∇_2, to operator $C_\varphi : H^\Phi(\Omega) \to H^\Phi(\Omega)$ ma własność Dunforda-Pettisa wtedy i tylko wtedy, gdy jest zwarty. Równoważność ta wynika z **Twierdzenia 4.32**, zgodnie z którym warunkiem koniecznym własności Dunforda-Pettisa operatora C_φ jest warunek $(*)$.

Konkluzja Uważam, że rozprawa doktorska pana Michała Rzeczkowskiego spełnia z nadmiarem wymogi stawiane pracom doktorskim. Jest zgrabnym wprowadzeniem w teorię przestrzeni Hardy'ego-Orlicza na (uogólnionych) obszarach kołowych na płaszczyźnie zespolonej. Zawiera również oryginalne i nietrywialne opracowanie zagadnienia zwartości operatora kompozycji w przestrzeniach Hardy'ego-Orlicza na obszarach kołowych w $\mathbb{C}$. Doktorant wykazał się też bardzo dobrą znajomością historii rozwoju teorii przestrzeni Hardy'ego i Hardy'ego-Orlicza, czego dał dowód w obszernym Wstępie. Materiału zawartego w rozprawie wystarczyłoby na co najmniej dwie prace doktorskie. Niestety, rozprawa obfituje również w usterki i drobne, ale bardzo utrudniające lekturę pracy pomyłki. Nie ma sensu, abym wszystkie je tutaj cytował, bo lista jest zbyt długa. Wymienię więc tylko kilka. Zarzut ogólny: przy tak obszernej rozprawie (75 stron) nie wystarcza Skorowidz pojęć. Potrzebny jest też Skorowidz symboli. Nie bardzo wiadomo, co autor rozumie przez składową nietrywianą (str. 13 i 17). Ciąg $\{z_n\}$ na str. 14 dążący do punktu β (powinno być $\beta \in \partial\Omega$) nagle staje się ciągiem $\{\alpha_n\}$. Twierdzenie 1.3 jest wersją klasycznego twierdzenia Osgooda-Taylora-Carathéodory'ego i sympatycznie byłoby o tym wspomnieć. Lemat 1.5 jest znaną uogólnioną zasadą symetrii Riemanna-Schwarza (zob. np. F. Leja, *Teoria funkcji analitycznych*, XII, § 15, wydanie z roku 1957) i dowód można było sobie darować. Harnacka tak właśnie piszemy, a nie Harnack'a (str. 16). Przyjęto w literaturze, że funkcja f jest logarytmicznie wypukła, jeśli funkcja $\log f$ jest wypukła, a to nie to samo, co wypukłość funkcji $t \to f(e^t)$ (str. 20). Brak definicji przestrzeni $H^{\Phi}_{z_0}$ i $\mathcal{H}^{\Phi}_{z_0}$ na str. 21 i 22. W argumencie z wypukłością funkji Φ na str. 23 powinno chyba być $m+1$ zamiast $m+2$. Nie znalazłem w pracy definicji funkcji brzegowej f^* w przypadku obszaru wielospójnego, a jest to podstawowe pojęcie (zob. Twierdzenie 2.6 i jego konsekwencje). Na str. 49 pojawiają się bez komentarza funkcje η_i zdefiniowane na str. 14 (Skorowidz symboli byłby rozwiązaniem). Dalej na tej stronie, miara μ ma być borelowska. Na str. 53 (C_0) nie jest warunkiem koniecznym dla (R_0) (napisano: dostatecznym). Dalej na tej stronie, trzeba się zdecydować: miara μ jest zanikająca, czy znikająca?

Mimo tych usterek, nie mam żadnych wątpliwości, że przedłożona rozprawa doktorska Michała Rzeczkowskiego spełnia wymogi stawiane pracom doktorskim w art. 13 ust. 1 ustawy z dnia 18 marca 2011 r. o zmianie ustawy - Prawo o szkolnictwie wyższym, ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki i wnoszę o dopuszczenie mgr. Michała Rzeczkowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

WPleśniak

prof. dr hab. Wiesław Pleśniak

Kraków, dnia 4 maja 2016 roku