Recenzja rozprawy doktorskiej
magistra Tomasza Stroińskiego
zatytułowanej
O pewnych półgrupach zbiorów zwartych wypukłych
oraz o minimalnych reprezentacjach elementów
ich przestrzeni ilorazowych.

Tematyka rozprawy doktorskiej mgra. Tomasza Stroińskiego jest związana z analizą wypukłą. Dotyczy ona przestrzeni Minkowskiego - Rådströma - Hörmandera (w skrócie przestrzeni MRH) i ich pewnych modyfikacji.
Bardziej szczegółowo, niech dla danej przestrzeni liniowej topologicznej Hausdorffa X, $B(X)$ oznacza stozek podzbiorów wypukłych, domkniętych i ograniczonych przestrzeni X (z sumą Minkowskiego i naturalnym mnozeniem przez skalar). Wtedy symbolem MRH(X) oznaczamy najmniejszą przestrzeń wektorową w którą mozna zanurzyć stozek $B(X)$. Elementami przestrzeni MRH(X) są klasy równowazności (względem pewnej relacji) par zbiorów wypukłych, domkniętych i ograniczonych. Ponadto relacja inkluzji w $B(X)$ wyznacza w przestrzeni MRH(X) częściowy porządek, który nadaje jej strukturę kraty.
Wypada wspomnieć, ze przestrzenie MRH znalazły zastosowanie w rachunku quasi-rózniczkowym, teorii multifunkcji, teorii multimiar, a nawet w ekonomii (bardziej szczegółowe dane znajdują się w recenzowanej rozprawie doktorskiej). W związku z powyzszym istotnego znaczenia nabiera pytanie o istnienie oraz charakteryzację tych par zbiorów, które są minimalne w swoich klasach równowazności ze względu na relację inkluzji. Rola par minimalnych w przestrzeni MRH jest tak samo istotna jak minimalna reprezentacja ułamków liczbowych, na których łatwiej wykonywać jest działania kiedy licznik i mianownik są mozliwie najmniejszymi liczbami reprezentującymi dany ułamek.
Tematyka minimalnej reprezentacji klas równowazności w przestrzeni MRH została zapoczątkowana pracą D. Pallaschke, S. Scholtesa i R. Urbańskiego z 1991 roku (zob. [29] w bibliografii rozprawy). Udowodniono w niej istnienie reprezentacji minimalnej (czyli minimalnej pary zbiorów wypukłych) w przestrzeni MRH(X) dla klas podzbiorów zwartych i wypukłych przestrzeni liniowej topologicznej X. W związku z powyzszym rezultatem istotnego znaczenia nabierają następujące pytaniana na które odpowiedź nie jest znana nawet w przypadku gdy $X = \mathbb{R}^n$ dla $n > 2$) :

1. W jaki sposób ustalić czy para zbiorów zwartych wypukłych jest parą minimalną?
2. W jaki sposób zredukować parę nieminimalną zbiorów do pary minimalnej?
3. W jaki sposób wyznaczyć wszystkie pary minimalne równowazne danej parze zbiorów?

W recenzowanej pracy doktorskiej podjęto próbę odpowiedzi na te pytania w przypadku rodziny $B_G(\mathbb{R}^n)$ wielościanów których wektory normalne do pełnowymiarowych ścian zawierają się w pewnym ustalonym skończonym zbiorze G.
Rozprawa mgra Stroińskiego składa się ze wstępu, sześciu rozdziałów i bibliografii

liczącej 42 pozycje.
Rozdziały pierwszy i drugi mają charakter wstępny. W rozdziale pierwszym zaprezentowano podstawowe oznaczenia i definicje wykorzystywane w dalszej części rozprawy. W rozdziale drugim omówiono pewne znane własności rodziny zbiorów niepustych, ograniczonych, domkniętych i wypukłych. Znajdujemy tu między innymi podstawowe fakty dotyczące przestrzeni Minkowskiego - Rådströma - Hörmandera, znane twierdzenia dotyczące redukcji par zbiorów wypukłych jak równiez znane kryteria minimalnści par zbiorów wypułych.
Oryginalne rezultaty doktoranta znajdują się w dalszych rozdziałach rozprawy.
W rozdziale trzecim została omówiona teoria G-wielościanów czyli wielościanów o ustalonych kierunkach ścian, które to obiekty były badane wcześniej między innymi przez Aleksandrowa, Grzybowskiego i Urbańskiego (zob. [1, 19, 20] w bibliografii rozprawy). W paragrafie 3.2 zdefiniowano główne pojęcia związane z G-wielościanami. Znajdujemy tu między innymi definicje sieci G, G-wielościanu, G-powłoki wypukłej, macierzy sieci G oraz wektora właściwego. Ponadto Przykład 3.2.12 pokazuje ze suma Minkowskiego dwóch G-wielościanów nie musi być G-wielościanem. W paragrafie 3.3 omówiono rózne reprezentacje wielościanów i wielokątów (czyli wielościanów w $\mathbb{R}^2$) potrzebne w dalszej części rozprawy. W paragrafie 3.4 (w związku z Przykładem 3.2.12) wprowadzono analogiczną do sumy Minkowskiego G-sumę Minkowskiego (zob. Def. 3.4.1), która pozwala zdefiniować w zbiorze G-wielościanów strukturę półgrupy. Wykazano tu rówiez podstawowe własności tej półgupy (m. in. porządkowe prawo skreśleń). W paragrafie 3.5 zdefiniowano podstawową dla dalszych badań relację równowazności par G-wielościanów. Paragraf 3.6 zawiera orginalne wyniki doktoranta opublikowane w pracy [36] (zob. bibliografię rozprawy).Rozpoczyna go Przykład 3.6.1 pokazujący ze znane kryteria minimalności dla wielokątów nie funkcjonują w przypadku G-minimalności. Główny rezultat tego rozdziału to Twierdzenie 3.6.10 podające warunki równowazne na G-minimalność. Wnioski 3.6.11 - 3.6.13 podają rózne sformułowania tego twierdzenia zalezne od reprezentacji wielokątów (zob. paragraf 3.3).
Rozdział 4 dotyczy rodzin G-wielościanów zamknięych ze względu na sumę Minkowskiego. Zawiera on oryginalne rezultaty doktoranta opublikowane w pracy [35] (zob. bibliografię rozprawy). Twierdzenie 4.1.5 dostarcza pełnej charakteryzacji takich rodzin G-wielościanów w $\mathbb{R}^3$ w języku odcinków sferycznych. Mówi ono ze rodzina $B_G(\mathbb{R}^3)$ wszystkich G-wielościanów jest zamknięta ze wzglęu na dodawanie Minkowskiego wtw gdy zachodzi warunek

(S) kazdy przekrój dwóch odcinków sferycznych o końcach w G nazlezy do G.

Waznymi uzupełnieniami Twierdzenia 4.1.5 są Twierdzenia 4.3.2 i 4.3.3, które podaje geometryczną charakteryzację warunku (S). Twierdzenia 4.2.4 i 4.2.5 dotyczą analogicznego problemu na płaszczyźnie (odcinki sferyczne są w tym przypadku zastąpione przez zwykłe odcinki) i są one wykorzystywane w dowodzie twierdzeń z paragrafu 4.3.
Najistotniejszą część rozprawy stanowi Rozdział piąty zawierający nieopublikowane oryginalne rezultaty doktoranta. W paragrafie 5.1 skonstruowano metodę redukcji dowolnej pary G-wielościanów do pary G-minimalnej wykorzystując metody programowania liniowego (zob. Tw. 5.1.5). Podano w nim rówiez kryterium G-minimalności wielościanów (zob. Tw. 5.1.3) jak rówiez twierdzenie o istnieniu pary G-minimalnej (zob. Tw. 5.1.6). Paragraf 5.2 zawiera moim zdaniem najistotniejszy rezultat rozprawy, a mianowicie algorytm znajdywania par G-minimalnych

(zob. Tw. 5.2.1). Działanie algorytmu uzyskanego w paragrafie 5.2 zilustrowano w paragrafie 5.3.
Mozliwe zastosowania G-minimalności ilustruje rozdział 6 rozprawy. W paragrafie 6.1 badany jest związek między G-minimalnością pary G-wielościanów a ich minimalnością (zob. Tw. 6.1.3 i Stw. 6.1.5). W paragrafie 6.2 wskazano mozliwe zastosowania G-wielościanów i wskazano dalsze mozliwe kierunki ich badań.

Moim zdaniem rozprawa doktorska magistra Tomasza Stroińskiego prezentuje wysoki merytoryczny poziom. Dowody głównych jej rezultatów wymagały od doktoranta duzej sprawności technicznej i wiedzy dotyczącej analizy wypukłej. Moim zdaniem, na szczególne wyrózniene zasługują wyniki czwartego i piątego rozdziału. Istotne jest równiez to ze rozprawa zawiera przykłady, które lepiej pozwalają zrozumieć sens wprowadzanych pojęć jak równiez dostarczają motywacji do formułowania zawartych w rozprawie twierdzeń. Ponadto rozprawa jest poprawnie zredagowana.

Na podstawie wyzej wymienionych faktów z pełną odpowiedzialnością stwierdzam, ze rozprawa doktorska magistra Tomasza Stroińskiego spełnia warunki ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki z dnia 14 marca 2003 roku. W związku z tym wnioskuję o nadanie magistrowi Tomaszowi Stroińskiemu stopnia doktora nauk matematycznych w dyscyplinie matematyka. Ponadto uwazam ze rozprawa zasługuje na wyróznienie.

Kraków, dnia 24 maja 2019 roku

Prof. dr hab. Grzegorz Lewicki
Profesor zwyczajny w Instytucie Matematyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie

Grzegorz Lewicki

Uzasadnienie wniosku o wyróznienie rozprawy magistra Tomasza Stroiskiego.

Wnioskuję o wyróznienie rozprawy doktorskiej magistra Tomasza Stroińskiego ze względu na uzyskane przez niego następujące rezultaty:

a. Twierdzenie 4.3.3 charakteryzujące skończone zbiory z wewnętrznie przecinającym się szkieletem sferycznym;

b. rezultaty z paragrafu piątego, w szczególności algorytm uzyskiwania par G-minimalnych z wykorzystaniem metody sympleksowej (zob. Twierdzenie 5.2.1).

Kraków, dnia 24 maja 2019 roku

Prof. dr hab. Grzegorz Lewicki
Profesor zwyczajny w Instytucie Matematyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie