

Prof. dr hab. Jarosław Grytczuk
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński, 30-348 Kraków
e-mail: grytczuk@tcs.uj.edu.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej

Marcin Witkowski

Properties of random coverings of graphs

Rozprawa doktorska Marcina Witkowskiego traktuje o własnościach losowych podniesień grafów (ang. lifts of graphs). Podniesienie grafu otrzymujemy przez n -krotne skopiowanie każdego wierzchołka oraz zastąpienie każdej krawędzi dowolnym skojarzeniem doskonałym pomiędzy kopiami jej końców. Losowe podniesienie grafu otrzymujemy wybierając te skojarzenia losowo (niezależnie z jednakowym prawdopodobieństwem). Pojęcie to wprowadzili w 2002 Amit i Linial jako uogólnienie odwzorowań nakrywających w topologii (ang. covering maps), ale także jako nowy model grafu losowego. Motywacji do badania tego modelu dostarczają także liczne zastosowania o charakterze informatycznym: konstrukcje ekspanderów, grafów Ramanujana, czy związku z tzw. Unique Games Conjecture.

W rozprawie doktorskiej Marcin Witkowski bada asymptotyczne własności losowych podniesień grafów, koncentrując się na dwóch problemach: rozmiarze klikki topologicznej i występowaniu cyklu Hamiltona. Nietrudno zauważyć, że maksymalny rozmiar klikki topologicznej w dowolnym podniesieniu ustalonego grafu G jest ograniczony przez maksymalny stopień rdzenia tego grafu plus jeden. Główny wynik tej części rozprawy orzeka, że (asymptotycznie prawie na pewno) losowe podniesienie dowolnego grafu G zawiera klikkę topologiczną tego rozmiaru. Rezultat ten stanowi znaczne rozszerzenie wyników Driera i Liniala, które dotyczyły jedynie przypadku losowych podniesień grafu pełnego. Dowód tego twierdzenia jest pomysłowy, dość zaawansowany i niełatwy technicznie. Główny zamysł jest prosty, sprowadza się bowiem do wykazania, że odpowiednia liczba kopii wierzchołka o maksymalnym stopniu w rdzeniu jest (prawie na pewno) połączona rozłącznymi ścieżkami. Do wykazania tego potrzebny jest jednak szereg niebanalnych oszacowań wykorzystujących strukturalne własności losowych podniesień.

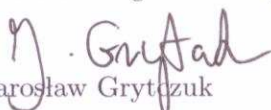
Nieznaczna modyfikacja tego dowodu pozwala także uzyskać ciekawy wynik dotyczący

spójności losowego podniesienia. Mianowicie, jeżeli minimalny stopień grafu G wynosi co najmniej $2k - 1$ to (asymptotycznie prawie na pewno) losowe podniesienie G jest k -połączone (ang. k -linked). Własność ta jest silniejsza od k -spójności, zatem wynik ten stanowi wzmocnienie rezultatu Amita i Liniala. Publikacja Marcina Witkowskiego zawierająca te rezultaty ukazała się niedawno w czasopiśmie *The Electronic Journal of Combinatorics*.

Drugi z głównych rezultatów rozprawy dotyczy cykli Hamiltona w losowym podniesieniu grafu. Orzeka on, że (asymptotycznie prawie na pewno) losowe podniesienie grafu G zawiera cykl Hamiltona, przy założeniu, że graf G zawiera co najmniej dwa rozłączne cykle Hamiltona, których suma nie jest grafem dwudzielnym, a jego minimalny stopień wynosi co najmniej 5. Wynik ten stanowi znaczące rozszerzenie dotychczasowych rezultatów, które dotyczyły jedynie grafów pełnych oraz klik dwudzielnych. Dowód jest dość złożony i trudny technicznie. Polega na konstrukcji algorytmu (składającego się z siedmiu faz), który albo znajduje cykl Hamiltona w losowym podniesieniu grafu, albo nie zatrzymuje się. Procedura wykorzystuje technikę Pósy stosowaną wcześniej w problemie cykli Hamiltona w grafach losowych oraz lemat o cyklach bazowych w losowym podniesieniu cyklu. Szczegółowa analiza pokazuje, że algorytm prawie na pewno zatrzymuje się, znajdując tym samym cykl Hamiltona w podniesieniu rozważanego grafu.

Prezentację omówionych wyników rozprawy poprzedza w rozdziale 3 elegancki przegląd głównych dokonań oraz problemów otwartych dotyczących podniesień grafów. Pozwala to czytelnikowi zorientować się w obecnym stanie badań w tej tematyce. W szczególności podany został znacznie uproszczony dowód fundamentalnego twierdzenia Amita i Liniala o spójności losowego podniesienia grafu. W ogóle redakcja pracy zasługuje na uznanie: nietatwa materia przedstawiona przejrzysto, trudne technicznie rozumowania zilustrowane sugestywnymi rysunkami, a nieliczne usterki (usunięte w poprawionej wersji pracy) bez znaczenia dla satysfakcji z lektury.

Podsumowując, stwierdzam, że rozprawa doktorska Marcina Witkowskiego zawiera nowe i wartościowe rezultaty dotyczące ważnego zagadnienia teorii grafów losowych. Bez wątpienia spełnia ona warunki Ustawy i uzasadnia nadanie Autorowi stopnia doktora nauk matematycznych. Marcin Witkowski zademonstrował w rozprawie znakomite opanowanie warsztatu badawczego, erudycję w tematyce rozprawy, a także walory pisarskie. Jestem przekonany, że jest on w pełni zdolny do samodzielnego prowadzenia badań naukowych. Wnoszę zatem o dopuszczenie go do dalszych etapów przewodu doktorskiego.


Jarosław Grytczuk

Kraków, 25 kwietnia 2014