UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
Wydział Matematyki i Informatyki
Zakład Analizy Funkcjonalnej

Wniosek o wszczęcie postępowania habilitacyjnego
na podstawie osiągnięcia naukowego zatytułowanego

Nieprzemienna przestrzeń Schwartza

Krzysztof Piszczek

Załącznik 2

Autoreferat

Poznań, listopad 2016

Collegium Mathematicum, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań
tel. +48 61 829 53 08, fax +48 61 829 53 15
wmiuam@amu.edu.pl

Spis treści

1 Dyplomy i stopnie naukowe . . . 3
2 Informacja o zatrudnieniu w jednostkach naukowych . . . 3
3 Osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 16 ust. 2 ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.) . . . 3
3.1 Lista publikacji wchodzących w skład osiągnięcia naukowego . . . 3
3.2 Omówienie wyników zawartych w publikacjach wchodzących w skład osiągnięcia naukowego . . . 4
3.2.1 Wstęp . . . 4
3.2.2 Preliminaria . . . 5
3.2.3 Automatyczna ciągłość – praca [H1] . . . 8
3.2.4 Posłuszność – prace [H1, H2, H3, H4] . . . 9
3.2.5 Rozkład Jordana – praca [H5] . . . 11
3.2.6 Ideały – praca [H6] . . . 11
3.2.7 Nierówność Grothendiecka – praca [H7] . . . 12
4 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych . . . 15
4.1 Lista pozostałych publikacji, niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego . . . 15
4.2 Krótkie omówienie wyników pozostałych publikacji . . . 15
4.2.1 Przestrzenie oswojone – prace [D1, D2, D3] . . . 15
4.2.2 Średnia ergodyczność – prace [D4, D6, D7, D9] . . . 16
4.2.3 Iloczyny tensorowe PLS-przestrzeni – praca [D5] . . . 17
4.2.4 Operatorowe przestrzenie Frécheta – praca [D8] . . . 17
4.2.5 Algebra multiplikatorów – praca [D10] . . . 19

Literatura **20**

1. Dyplomy i stopnie naukowe

2000	magister ekonomii	Wydział Ekonomii Akademii Ekonomicznej w Poznaniu Promotor: prof. dr hab. Emil Panek Tytuł: *Magistrala produkcyjna w trójsektorowym, dynamicznym, jednorodnym modelu gospodarki Leontiefa*
2003	magister matematyki	Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. A. Mickiewicza w Poznaniu Promotor: prof. dr hab. Paweł Domański Tytuł: *Oswojone przestrzenie Frécheta*
2007	doktor nauk matematycznych w zakresie matematyki	Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. A. Mickiewicza w Poznaniu Promotor: prof. dr hab. Paweł Domański Tytuł: *Charakterystyki ciągłości operatorów na przestrzeniach Frécheta i pojęcia pokrewne*

2. Informacja o zatrudnieniu w jednostkach naukowych

01.10.2007 –	adiunkt	Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. A. Mickiewicza w Poznaniu

3. Osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 16 ust. 2 ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.)

Powyższym osiągnięciem naukowym jest cykl siedmiu, powiązanych tematycznie, publikacji zatytułowany *Nieprzemienna przestrzeń Schwartza*.

3.1. Lista publikacji wchodzących w skład osiągnięcia naukowego[1]

[H1] K. Piszczek, *Automatic continuity and amenability in the non-commutative Schwartz space*, J. Math. Anal. Appl. **432** (2015), no. 2, 954–964.

[H2] K. Piszczek, *Corrigendum to "Automatic continuity and amenability in the non-commutative Schwartz space"*, J. Math. Anal. Appl. **435** (2016), no. 1, 1015–1016.

[H3] K. Piszczek. "The noncommutative Schwartz space is weakly amenable". To appear in Glasgow Math. J., DOI: 10.1017/S0017089516000264, `https://doi.org/10.1017/S0017089516000264`.

[1] Prace uporządkowane są zgodnie z „bliskością" tematyczną.

[H4] K. Piszczek. "Self-derivations on the noncommutative Schwartz space". To appear in RACSAM, DOI: 10.1007/s13398-016-0350-y, `http://link.springer.com/article/10.1007/s13398-016-0350-y`.

[H5] K. Piszczek, *A Jordan-like decomposition in the noncommutative Schwartz space*, Bull. Aust. Math. Soc. **91** (2015), no. 2, 322–330.

[H6] K. Piszczek, *One-sided ideals of the non-commutative Schwartz space*, Monatsh. Math. **178** (2015), no. 4, 599–610.

[H7] R. Levene i K. Piszczek, *Grothendieck's Inequality in the noncommutative Schwartz space*, Studia Math. **234** (2016), no. 2, 185–194.

3.2. Omówienie wyników zawartych w publikacjach wchodzących w skład osiągnięcia naukowego

3.2.1. Wstęp

Głównym obiektem badań, wchodzących w skład osiągnięcia naukowego, jest nieprzemienna przestrzeń Schwartza[2]. Jest to pewna szczególna, nieprzemienna algebra Frécheta z inwolucją. Badania te stanowią zatem część teorii algebr topologicznych. Nieprzemienna przestrzeń Schwartza pojawia się w wielu kontekstach. Wymieńmy niektóre z nich:

- geometria nieprzemienna – [6] oraz [18, str. 212–213],
- K-teoria – [5, 19, 35, 53],
- C^*-układy dynamiczne – [29],
- kohomologie cykliczne produktów skręconych – [68],
- lokalnie wypukłe przestrzenie operatorowe – [27],
- mechanika kwantowa – [25].

W wymienionych wyżej zagadnieniach algebra ta służy, jako naturalny przykład rozważanych obiektów, jej specyficzna struktura nie jest jednak badana. Jednocześnie tak częsta jej obecność w różnych kontekstach sugeruje, że może mieć ona ciekawe własności, interesujące z punktu widzenia dalszych zastosowań. Badania nad nieprzemienną przestrzenią Schwartza wpisują się także w program poszukiwania nieprzemiennych odpowiedników znanych obiektów przemiennych. Otóż nieprzemienna przestrzeń Schwartza jest izomorficzna (jako przestrzeń Frécheta, ale nie algebra) z przestrzenią funkcji gładkich na przedziale zwartym czy też przestrzenią Schwartza funkcji próbnych dla dystrybucji temperowanych (szczegóły znajdują się w części 3.2.2). Dlatego też nieprzemienna przestrzeń Schwartza stała się głównym tematem badań autora, wyniki których złożyły się na omawiane osiągnięcie naukowe.

Nieprzemienna przestrzeń Schwartza jest podprzestrzenią liniową (ale nie topologiczną) C^*-algebry $\mathcal{B}(\ell_2)$ operatorów liniowych, ciągłych na ośrodkowej przestrzeni Hilberta ℓ_2. Pozwala to dostrzec pewne związki z teorią C^*-algebr – będziemy starali się je pokazać podczas omawiania poszczególnych wyników. Występują też pewne różnice, z których dwie mają znaczenie fundamentalne. W przeciwieństwie do C^*-algebr, nieprzemienna przestrzeń Schwartza nie posiada ograniczonej aproksymacyjnej

[2] Definicja tego oraz innych, używanych w autoreferacie pojęć, jak również podstawowe własności omawianych obiektów, znajdują się w części 3.2.2

jedynki. Po drugie zaś, jej topologia nie może być zadana przez C^*-normy.[3] Rodzi to techniczne trudności, sposób pokonania których opisujemy w części 3.2.3 oraz 3.2.4.

Własności nieprzemiennej przestrzeni Schwartza omówione są według nastepującego porządku. Zaraz po wprowadzeniu (*Preliminaria*) zajmujemy się automatyczną ciągłością funkcjonałów i różniczkowań, działających z nieprzemiennej przestrzeni Schwartza (*Automatyczna ciągłość*). Kolejna część również poświęcona jest różniczkowaniom (*Posłuszność*). Tym razem jednak badamy, w jakim sensie możemy mówić, że są one wewnętrzne. Następnie pokazujemy, że każdy ciągły funkcjonał samosprzężony rozkłada się na różnicę dwóch funkcjonałów dodatnich (*Rozkład Jordana*). Kolejnym zagadnieniem jest opis ideałów nieprzemiennej przestrzeni Schwartza (*Ideały*). Ostatnia zaś część traktuje o ciągłych formach dwuliniowych (*Nierówność Grothendiecka*).

3.2.2. Preliminaria

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

– $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\},\ \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

– $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ – ciąg wektorów jednostkowych, tzn. e_j jest ciągiem, którego j-ta współrzędna jest równa 1, pozostałe zaś 0,

– $(e_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ – ciąg macierzy jednostkowych, tzn. e_{ij} jest nieskończoną macierzą, której (i, j)-ta współrzędna jest równa 1, pozostałe zaś 0.

Niech

$$s := \left\{\xi = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \colon |\xi|_n := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 j^{2n}\right)^{1/2} < \infty \text{ dla wszystkich } n \in \mathbb{N}_0\right\}$$

będzie *przestrzenią ciągów szybko malejących* z (metryzowalną, zupełną) topologią zadaną przez ciąg norm $(|\cdot|_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Jest to przestrzeń Frécheta, w której (przeliczalna) baza otoczeń zera $(U_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadana jest poprzez

$$U_n := \{\xi \in s\colon\ |\xi|_n \leqslant 1\}.$$

Ciąg wektorów jednostkowych $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ stanowi bazę Schaudera w przestrzeni ciągów szybko malejących. Poniższy wynik pokazuje, że jest ona naturalnym obiektem analizy funkcjonalnej.

Stwierdzenie 1 ([49, Example 29.5])

(i) Jeżeli $(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem funkcji Hermite'a, to odwzorowanie $e_j \mapsto H_j$ ustala izomorfizm (przestrzeni Frécheta) pomiędzy s oraz przestrzenią $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ funkcji próbnych dla dystrybucji temperowanych.

(ii) Jeżeli $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem wielomianów Czebyszewa (pierwszego rodzaju), to odwzorowanie $e_j \mapsto T_j$ ustala izomorfizm (przestrzeni Frécheta) pomiędzy s oraz przestrzenią $C^\infty([-1, 1])$ funkcji gładkich na przedziale zwartym $[-1, 1]$.

Przestrzeń dualną do s, czyli przestrzeń $L(s, \mathbb{C})$ funkcjonałów liniowych, ciągłych na s utożsamiamy z *przestrzenią ciągów wolno rosnących*, określaną w następujący sposób:

$$s' := \left\{\eta = (\eta_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \colon |\eta|_{-n} := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^2 j^{-2n}\right)^{1/2} < \infty \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

[3] Mamy tu na myśli normy spełniające równość $\|x\|^2 = \|x^*x\|$.

Dualność ta zadana jest wzorem

$$\langle \xi, \eta \rangle := \sum_{j\in\mathbb{N}} \xi_j \overline{\eta_j} \qquad (\xi \in s,\, \eta \in s'). \tag{1}$$

Zbiory

$$B_n := \{\eta \in s' \colon\ |\eta|_{-n} \leqslant 1\} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

tworzą fundamentalny ciąg zbiorów ograniczonych w s'. Są to w istocie polary odpowiednich otoczeń zera, tzn. $B_n = U_n^\circ$. Symbolem $L(s', s)$ oznaczamy przestrzeń operatorów liniowych, ciągłych z s' do s i wprowadzamy w niej topologię zbieżności jednostajnej na zbiorach ograniczonych. Jest to także topologia zupełna i metryzowalna, zadana przez ciąg norm $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, zdefiniowanych wzorem

$$\|x\|_n := \sup\left\{|x\eta|_n \colon\ \eta \in U_n^\circ\right\}. \tag{2}$$

Innymi słowy, $x \in L(s', s)$ wtedy i tylko wtedy, gdy – dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_0$ – x jest operatorem ograniczonym pomiędzy ważonymi przestrzeniami Hilberta $\ell_2((j^{-n})_{j\in\mathbb{N}})$ oraz $\ell_2((j^{n})_{j\in\mathbb{N}})$. Zachodzi więc teorio-mnogościowa równość

$$L(s', s) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{B}\big(\ell_2((j^{-n})_{j\in\mathbb{N}}), \ell_2((j^{n})_{j\in\mathbb{N}})\big).$$

Z kolei topologia na $L(s', s)$ jest najsłabszą lokalnie wypukłą topologią, przy której wszystkie włożenia

$$L(s', s) \hookrightarrow \mathcal{B}\big(\ell_2((j^{-n})_{j\in\mathbb{N}}), \ell_2((j^{n})_{j\in\mathbb{N}})\big) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

są ciągłe. Nietrudno otrzymać także następujące izomorfizmy przestrzeni Frécheta:

$$L(s', s) \simeq s\widetilde{\otimes} s \simeq s, \tag{3}$$

zatem, jako przestrzenie Frécheta, $L(s', s)$ oraz s (a więc także $C^\infty([-1, 1])$ i $\mathcal{S}(\mathbb{R})$) są nierozróżnialne. Korzystając z ciągłego włożenia

$$\iota \colon s \hookrightarrow s',$$

wprowadzamy na przestrzeni $L(s', s)$ mnożenie, jako składanie operatorów

$$xy := x \circ \iota \circ y \qquad (x, y \in L(s', s)). \tag{4}$$

Łatwo zauważyć, że jest ono łącznie ciągłe. Z kolei przy pomocy dualności (1), definiujemy inwolucję wzorem

$$\langle x^*\xi, \eta \rangle := \langle \xi, x\eta \rangle \qquad (x \in L(s', s),\, \xi, \eta \in s'). \tag{5}$$

Wraz z powyżej zdefiniowanymi operacjami przestrzeń $L(s', s)$ staje się m-wypukłą[4] *-algebrą Frécheta. W algebrze tej możemy jeszcze wprowadzić porządek. Istotnie, ciągłe włożenia

$$s \hookrightarrow \ell_2 \hookrightarrow s'$$

implikują ciągłość włożenia

[4] O algebrze topologicznej mówimy, że jest *m-wypukła*, gdy istnieje układ submultiplikatywnych półnorm, definiujący jej topologię. Spotkać można także określenia *lokalnie multiplikatywnie wypukła* bądź też *Arensa-Michaela*. W przeciwieństwie do algebr Banacha, nie każda algebra Frécheta jest m-wypukła – patrz [32, s. 14].

$$L(s', s) \hookrightarrow \mathcal{B}(\ell_2). \tag{6}$$

To zaś oznacza, że na $L(s', s)$ możemy rozważać porządek dziedziczony z C^*-algebry $\mathcal{B}(\ell_2)$ operatorów liniowych, ciągłych na ośrodkowej przestrzeni Hilberta ℓ_2. Porządek ten posiada wiele naturalnych własności, analogicznych do porządku w C^*-algebrach. W szczególności trzy naturalne definicje elementu dodatniego się pokrywają, tj. operator $x \in L(s', s)$ jest *dodatni* (w skrócie $x \geqslant 0$) wtedy, gdy

(i) widmo $\sigma(x)$ zawiera się w $[0, \infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

(ii) $x = y^*y$ dla pewnego $y \in L(s', s)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

(iii) $\langle x\xi, \xi\rangle \geqslant 0$ dla każdego ciągu $\xi \in s'$.

Więcej na temat własności porządku zawiera praca [H1, Proposition 3]. Na nieprzemiennej przestrzeni Schwartza istnieje także rachunek funkcyjny – patrz [15, Corollary 5.1]. Ma on na tyle dobre własności, że możemy pierwiastkować elementy dodatnie a także rozkładać elementy samosprzężone na różnicę elementów dodatnich. To pozwala nam zdefiniować *część dodatnią* x_+ oraz *część ujemną* x_- dowolnego samasprzężonego operatora $x \in L(s', s)$. W sposób naturalny możemy także zdefiniować funkcjonały dodatnie na $L(s', s)$. Powiemy, że funkcjonał liniowy $\varphi\colon L(s', s) \to \mathbb{C}$ jest *dodatni*, gdy $\varphi(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \geqslant 0$.

Jesteśmy teraz gotowi do zdefiniowania centralnego obiektu naszych badań.

Definicja 2 *Nieprzemienna przestrzeń Schwartza $\mathcal{S}$, to przestrzeń $L(s', s)$ operatorów liniowych, ciągłych z przestrzeni ciągów wolno rosnących do przestrzeni ciągów szybko malejących, wraz z topologią zadaną przez ciąg norm* (2)*, mnożeniem* (4)*, inwolucją* (5) *oraz porządkiem zadanym przez* (6)*.*

Symbolem $\mathcal{S}_{sa}$ oznaczać będziemy podzbiór elementów samosprzężonych, zaś symbolem $\mathcal{S}_+$ podzbiór elementów dodatnich w $\mathcal{S}$. Termin „nieprzemienna przestrzeń Schwartza” bierze się z izomorfizmu przestrzeni Fréscheta $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R})$ – patrz Stwierdzenie 1(i) oraz warunek (3). Z kolei izomorfizm przestrzeni Frécheta $\mathcal{S} \simeq C^\infty([-1, 1])$ (patrz Stwierdzenie 1(ii) oraz warunek (3)) motywuje stosowanie terminu „algebra operatorów gładkich”. Takiej też nazwy używają Cuntz – patrz np. [19] czy Elliott, Natsume, Nest – patrz [29]. Można spotkać też określenie „algebra tensorowa przestrzeni ciągów szybko malejących” – patrz np. [48]. Ta ostatnia nazwa bierze się z izomorfizmu *-algebr Frécheta $\mathcal{S} \simeq s\widetilde{\otimes}s$, o ile w iloczynie tensorowym $s\widetilde{\otimes}s$ wprowadzimy mnożenie

$$(x_1 \otimes x_2) \cdot (y_1 \otimes y_2) := \langle y_1, x_2^*\rangle x_1 \otimes y_2$$

oraz inwolucję

$$(x \otimes y)^* := y^* \otimes x^{*5}.$$

Nieprzemienna przestrzeń Schwartza posiada kilka naturalnych reprezentacji. Przedstawiamy poniżej najbardziej dla nas użyteczną, inne zgromadzone są w [22, Theorem 1.1].

Stwierdzenie 3 ([22, Theorem 1.1]) *Niech*

$$\mathscr{K}^\infty := \left\{x = (x_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \colon\ \|x\|_{n,\infty} := \sup_{i,j\in\mathbb{N}} |x_{ij}|(ij)^n < +\infty \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}_0\right\}$$

oznacza algebrę macierzy szybko malejących *z topologią zadaną przez ciąg* $(\|\cdot\|_{n,\infty})_{n\in\mathbb{N}_0}$ *norm, mnożeniem macierzy oraz hermitowskim sprzężeniem, jako inwolucją. Przyporządkowanie* $e_i \otimes e_j \mapsto e_{ij}$ $(i, j \in \mathbb{N})$ *określa *-izomorfizm algebr Frécheta pomiędzy $\mathcal{S}$ oraz $\mathscr{K}^\infty$.*

[5] Przypomnijmy, że gdy x jest ciągiem, to przyjmujemy $x^* := (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots)$

3.2.3. Automatyczna ciągłość – praca [H1]

Teoria automatycznej ciągłości jest obszernym działem analizy funkcjonalnej. Koncentruje się ona na badaniu, kiedy pewne szczególne odwzorowania liniowe są ciągłe (stąd też termin „automatyczna ciągłość"). Naturalnym środowiskiem dla takich badań są homomorfizmy algebr oraz różniczkowania z algebr do ich modułów. W tym kontekście *homomorfizmem* algebr topologicznych A, B nazwiemy odwzorowanie liniowe (niekoniecznie ciągłe) $\theta\colon A \to B$, spełniające

$$\theta(ab) = \theta(a)\theta(b) \qquad (a, b \in A).$$

Z kolei *różniczkowaniem* z algebry topologicznej A do topologicznego A-modułu[6] X nazwiemy odwzorowanie liniowe (niekoniecznie ciągłe) $\delta\colon A \to X$, spełniające tzw. „regułę różniczkowania"

$$\delta(ab) = \delta(a) \cdot b + a \cdot \delta(b).$$

Jeżeli dla pewnego elementu $x \in X$ zachodzi

$$\delta(a) = a \cdot x - x \cdot a \qquad (a \in A),$$

to różniczkowanie takie nazywamy *wewnętrznym* i stosujemy zapis $\delta = \mathrm{ad}_x$. Zagadnienia dotyczące automatycznej ciągłości rozważa się najczęściej w kategorii algebr oraz modułów Banacha, niemniej pojawiają się też prace dotyczące algebr i modułów Frécheta – patrz [60, 69, 70]. Z automatyczną ciągłością homomorfizmów wiąże się również zagadnienie jedyności topologii na zadanej algebrze – patrz [21, Proposition 2.1.7]. Automatycznej ciągłości dotyczy wreszcie jedno z istotniejszych pytań tej teorii a mianowicie tzw. *problem Michaela*.[7]

W pracy [H1] udowodnione są następujące wyniki z automatycznej ciągłości:

(i) każdy funkcjonał dodatni na $\mathcal{S}$ jest ciągły,

(ii) każde różniczkowanie z $\mathcal{S}$ do dowolnego $\mathcal{S}$-modułu Frécheta jest ciągłe.

Idea dowodu automatycznej ciągłości funkcjonałów dodatnich jest podobna do idei odpowiedniego dowodu dla C^*-algebr (wynika to z faktu, że porządek na $\mathcal{S}$ jest dziedziczony z $\mathcal{B}(\ell_2)$). Niemniej narzędzia, jakich trzeba tu użyć, są inne. Otóż nieprzemienna przestrzeń Schwartza nie jest lokalnie C^*-algebrą, tzn. jej topologia nie jest zadana przez C^*-normy. Istotnie, z [12, Proposition A.2.8] wynika równość widm $\sigma_{\mathcal{S}_1}(x) = \sigma_{\mathcal{B}(\ell_2)}(x)$ dla dowolnego operatora $x \in \mathcal{S}_1 := \mathcal{S} \oplus \mathbb{C}$ (ujedynkowienie nieprzemiennej przestrzeni Schwartza). To z kolei implikuje, że $\mathcal{S}_1$ jest Q-algebrą (zbiór elementów odwracalnych jest otwarty). Tym samym ([32, Theorems 8.2, 8.3]) $\mathcal{S}$ musiałaby być C^*-algebrą, co być nie może. Okazuje się jednak, że ta – wspomniana we wstępie, jako jedna z dwóch istotnych – bariera może być pokonana przy użyciu poniższej nierówności.

Lemat 4 ([H1, Lemma 8]) *Dla każdego operatora $x \in \mathscr{K}^\infty$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}_0$ mamy*

$$\|x\|_{n,\infty}^2 \leqslant \max\{\|x^*x\|_{2n,\infty}; \|xx^*\|_{2n,\infty}\}.$$

Uwaga. Późniejsze badania, szczególnie praca [H7] pokazują, że powyższą nierówność można nieco wzmocnić, mianowicie $\|x\|_{n,\infty}^2 \leqslant \|x^*x\|_{2n,\infty}^{\frac{1}{2}} \|xx^*\|_{2n,\infty}^{\frac{1}{2}}$.

Jako wniosek, otrzymujemy nastepujący fakt.

[6] Przez *moduł* rozumiemy zawsze moduł obustronny, zaś przymiotnik „topologiczny" oznacza, że jest to także przestrzeń lokalnie wypukła i operacje modułowe są (łącznie) ciągłe.

[7] W swej pracy [50] postawił on pytanie (o ile autorowi wiadomo, do tej pory nierozstrzygnięte), czy każdy funkcjonał liniowo-multiplikatywny na m-wypukłej algebrze Frécheta jest automatycznie ciągły (jak wiadomo, jest tak w każdej algebrze Banacha). Więcej na temat problemu Michaela można znaleźć w pracy [30].

Wniosek 5 ([H1, Corollary 10]) *Zbiór $A \subset \mathcal{S}$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy ograniczony jest zbiór $\{x^*x, xx^*\colon\ x \in A\}$. Zbiór $B \subset \mathcal{S}_{sa}$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy ograniczony jest zbiór $\{x_+, x_-\colon\ x \in B\}$.*

Powyższy wniosek pozwala nam ograniczyć badanie ciągłości funkcjonałów dodatnich do zbioru elementów dodatnich. Dokładnie rzecz biorąc, pokazujemy – podobnie, jak dla C^*-algebr – że każdy funkcjonał dodatni jest ograniczony na zbiorze elementów dodatnich (tzn. przeprowadza zbiory ograniczone w $\mathcal{S}_+$ w zbiory ograniczone w $\mathbb{C}$). Podreślmy jednak pewną subtelność: ograniczoność i ciągłość odwzorowania liniowego nie są pojęciami tożsamymi w dowolnej przestrzeni lokalnie wypukłej. Jest tak tylko w przestrzeniach *bornologicznych*. Jest to zresztą jedna z równoważnych definicji tych przestrzeni – patrz [49, Proposition 24.10]. Okazuje się jednak, że przestrzenie Frécheta są bornologiczne – patrz [49, Proposition 24.13].

Z kolei w dowodzie automatycznej ciągłości różniczkowań kluczowy jest poniższy lemat, pokazany dla C^*-algebr przez Ringrose'a w [62, Lemma 1].

Lemat 6 ([H1, Lemma 12]) *Niech $x \in \mathcal{S}$, $y \in \mathcal{S}_+$ i załóżmy, że $xx^* \leqslant y^4$. Wtedy istnieje taki operator $z \in \mathcal{S}$, że $yz = x$ oraz $\|z\|_{n,\infty} \leqslant \sqrt{2}\max\{\|y\|_{2n,\infty}; \|x\|_{4n,\infty}^{\frac{1}{2}}\}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$.*

Istotą tego lematu jest możliwość rozkładania elementów nieprzemiennej przestrzeni Schwartza na iloczyn dwóch innych oraz fakt, że normy jednego z nich możemy w sposób dość ścisły kontrolować. Własność ta stanie się jeszcze bardziej widoczna przy omawianiu wyników pracy [H6].

3.2.4. Posłuszność – prace [H1, H2, H3, H4]

Rozpoczniemy tę część od wyjaśnienia terminologii. Używany przez nas zwrot „posłuszność" ma być tłumaczeniem angielskiego terminu „amenable". Funkcjonujące w obiegu tłumaczenie tego terminu, jako „średniowalność", wydaje się być adekwatne w odniesieniu do grup raczej (grupa średniowalna), niż algebr. W kontekście teorii grup rzeczywiście nawiązuje ono do posiadania przez grupę średniej Banacha. Dla algebry zaś własność ta oznacza, że wszystkie jej różniczkowania są wewnętrzne. Innymi słowy, każde różniczkowanie jest na tyle „posłuszne", że zmienia się w wewnętrzne. Jako że nazwa ta nie jest powszechnie przyjęta, stosujemy ją tylko w niniejszym autoreferacie.

Początki badań nad grupami średniowalnymi (jako pierwsza, własność ta pojawia się właśnie w teorii grup, nie algebr) odnajdujemy już w słynnym paradoksie Banacha–Tarskiego. W ujęciu współczesnym paradoks ten bierze się z faktu, iż grupa $SO(3)$ posiada podgrupę izomorficzną z grupą wolną o dwóch generatorach $\mathbb{F}_2$, która nie jest średniowalna – patrz [64, Theorems 0.1.2, 0.1.4]. Posłuszne algebry Banacha, to dopiero prace B.E. Johnsona. Pokazał on nastepujący fakt.

Twierdzenie 7 ([43, Theorem 2.5]) *Niech G będzie grupą lokalnie zwartą. Następujące warunki są równoważne:*

(i) G jest średniowalna,

(ii) każde ciągłe różniczkowanie $\delta\colon L^1(G) \to X^*$ z algebry grupowej $L^1(G)$ grupy G do dowolnego dualnego $L^1(G)$-modułu X^* jest wewnętrzne.

Drugi warunek powyższego twierdzenia ma sens dla dowolnej algebry, dlatego też powiemy, że algebra Banacha [Frécheta] jest *posłuszna*, jeżeli każde jej ciągłe różniczkowanie do dowolnego dualnego[8] mnodułu Banacha [Frécheta] jest wewnętrzne. Teoria algebr posłusznych jest bardzo obszerna

[8]Jeżeli X jest A-modułem, to X^* jest *dualnym A-modułem*, zadanym poprzez $\langle a \cdot \varphi, x\rangle := \langle \varphi, x \cdot a\rangle$, $\langle \varphi \cdot a, x\rangle := \langle \varphi, a \cdot x\rangle \quad (a \in A, x \in X, \varphi \in X^*)$.

i zawiera wiele nietrywialnych wyników. Jednym z nich jest chrakteryzacja posłusznych C^*-algebr. Connes pokazał w [17], że każda posłuszna C^*-algebra jest nuklearna[9], zaś Haagerup udowodnił w [39, Theorem 3.1] – przewidywaną przez Conne'a – relację odwrotną. Teoria algebr posłusznych zawiera w sobie badania nad ogólniejszymi wersjami powyższej definicji. W szczególności – patrz [33, Definition 1.3] – powiemy, że algebra Banacha [Frécheta] A jest *aproksymacyjnie posłuszna*[10], jeżeli dla każdego ciągłego różniczkowania $\delta\colon A \to X$ do dowolnego (nie tylko dualnego) A-modułu Banacha [Frécheta] X istnieje sieć $(x_\alpha)_\alpha \subset X$ spełniająca warunek

$$\delta(a) = \lim_\alpha (a \cdot x_\alpha - x_\alpha \cdot a) \qquad (a \in A).$$

Jeżeli, dodatkowo, sieć operatorów $(\mathrm{ad}_{x_\alpha})_\alpha$ tworzy zbiór jednakowo ciągły w przestrzeni $L(A, X)$, to algebrę A nazywamy *jednakowo aproksymacyjnie posłuszną* – patrz [34, Definition 5.1].

Posłuszność m-wypukłych algebr Frécheta jest rozważana w [55]. W szczególności z [55, Theorem 9.7] oraz [H1, Proposition 2] wynika, że nieprzemienna przestrzeń Schwartza nie jest posłuszna. Możemy natomiast badać (jednakową) aproksymacyjną posłuszność $\mathcal{S}$. Wcześniej własności te – w kategorii algebr Frécheta – badane były w pracach [45, 54]. Dotyczyły one tylko algebr przemiennych, podczas gdy omawiane prace [H1, H2, H3, H4] dotyczą nieprzemiennej algebry $\mathcal{S}$. Dlatego też należało zastosować odmienne techniki dowodowe. W pracy [H1, Theorem 15] podajemy warunek równoważny na to, aby algebra Frécheta była aproksymacyjnie posłuszna. Zaś [H1, Theorem 16] pokazuje, że warunek ten jest spełniony w nieprzemiennej przestrzeni Schwartza. W dowodzie tego ostatniego twierdzenia kluczowe było wykorzystanie istnienia ciągowej aproksymacyjnej jedynki w $\mathcal{S}$. Jak już wspominaliśmy we wstępie, nieprzemienna przestrzeń Schwartza nie posiada ograniczonej aproksymacyjnej jedynki – patrz [H1, Proposition 2]. Jej brak nie pozwala stosować wielu technik dowodowych. Korzystając jednak z faktu, że macierze jednostkowe $(e_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ stanowią bazę Schaudera w $\mathcal{S}$, możemy pokazać, że macierze $u_n := \sum_{j=1}^n e_{jj}$ $(n \in \mathbb{N})$ stanowią ciągową aproksymacyjną jedynkę. Tym samym pokonujemy drugą – wspomnianą we wstępie – barierę natury technicznej. W pracy [H1] znajduje się jeszcze wynik mówiący, że $\mathcal{S}$ nie jest jednakowo aproksymacyjnie posłuszna. Okazuje się jednak, że można wzmocnić [H1, Theorem 15] tak, aby otrzymać warunek równoważny na to, by algebra Frécheta była jednakowo aproksymacyjnie posłuszna. Mówi o tym [H2, Theorem 1]. Dokładniejsza analiza dowodu [H1, Theorem 16] pokazuje, że w istocie nieprzemienna przestrzeń Schwartza jest jednakowo aproksymacyjnie posłuszna.

Prace [H3, H4] traktują o różniczkowaniach w nieco węższym zakresie. W pierwszej z nich rozważamy tylko różniczkowania $\delta\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ i pytamy, czy każde z nich jest wewnętrzne. Innymi słowy pytamy, czy nieprzemienna przestrzeń Schwartza jest *słabo posłuszna*. W [H3, Theorem 4] udzielamy odpowiedzi twierdzącej. Nawiązujemy tym samym do wcześniejszych prac Johnsona (algebra grupowa $L^1(G)$ dowolnej lokalnie zwartej grupy G jest słabo posłuszna – [44, Theorem]) oraz Haagerupa (każda C^*-algebra jest słabo posłuszna – [39, Corollary 4.2]). Tego ostatniego faktu dowodzi się przy użyciu tzw. nieprzemiennej nierówności Grothendiecka (będziemy o niej jeszcze mówić w części 3.2.7). O ile autorowi wiadomo, nadal bez odpowiedzi pozostaje pytanie, czy można pokazać słabą posłuszność C^*-algebr bez pomocy tego narzędzia – patrz [64, Problem 19, s. 224].

Z kolei w ostatniej z omawianych tutaj prac rozważamy różniczkowania na $\mathcal{S}$ i pytamy, czy każde rózniczkowanie $\delta\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ jest wewnętrzne. Inaczej, niż w przypadku słabej posłuszności, tym razem nieprzemienna przestrzeń Schwartza różni się od C^*-algebry operatorów liniowych, ciągłych na ośrodkowej przestrzeni Hilberta. Jak pokazał Sakai w [65, Theorem 1], każde różniczkowanie na $\mathcal{B}(\ell_2)$ jest

[9] C^*-algebra A jest *nuklearna*, gdy $A \otimes_{\min} B = A \otimes_{\max} B$ dla dowolnej C^*-algebry B – patrz [57, Part II] oraz [14, Part 1].

[10] Formalnie rzecz biorąc, [33, Definition 1.3] wprowadza pojęcie algebry aproksymacyjnie super-posłusznej, podczas gdy algebra aproksymacyjnie posłuszna opisana jest w [33, Definition 1.2]. Dla algebr Frécheta pojęcia te są tożsame – patrz [45, Theorem 2.6].

wewnętrzne (oprócz algebr von Neumanna, jest tak także dla prostych C^*-algebr z jedynką – patrz [66, Theorem]). Nam zaś udało się pokazać w [H4, Theorem 2] (porównaj [67, Proposition 6.3.2]), że dla dowolnego różniczkowania $\delta\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ istnieje, co prawda, operator x, czyniący zadość równości $\delta = \mathrm{ad}_x$, niemniej ów operator x nie jest elementem nieprzemiennej przestrzeni Schwartza a tylko jej algebry multiplikatorów $\mathcal{MS}$ (powiemy o niej więcej, omawiając wyniki pracy [D10]). Wystarczy więc wziąć dowolny operator $y \in \mathcal{MS} \setminus \mathcal{S}$ (zobaczymy w części 4.2.5, że takie istnieją), aby się przekonać, że $\mathrm{ad}_y\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ nie jest różniczkowaniem wewnętrznym.[11]

3.2.5. Rozkład Jordana – praca [H5]

Przypomnijmy, że jeżeli μ jest rzeczywistą miarą określoną na pewnej σ-algebrze zbiorów, to możemy ją rozłożyć na różnicę dwóch miar dodatnich $\mu = \mu_+ - \mu_-$ i rozkład ten jest minimalny w tym sensie, że jeżeli tylko $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$ i miary $\lambda_i\,(i = 1, 2)$ są dodatnie, to $\lambda_1 \geqslant \mu_+$ i $\lambda_2 \leqslant \mu_-$. Można powyższą własność wyrazić także w języku analizy funkcjonalnej mówiąc, że każdy ciągły funkcjonał samosprzężony[12] na przemiennej C^*-algebrze rozkłada się na różnicę dwóch funkcjonałów dodatnich. Fakt ten na dowolne C^*-algebry uogólnił Grothendieck. Pokazał on w [38], że każdy ciągły funkcjonał samosprzężony φ na dowolnej C^*-algebrze rozkłada się jednoznacznie na różnicę dwóch funkcjonałów dodatnich $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$, takich że $\|\varphi_+ - \varphi_-\| = \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\|$. Wynik [H5, Theorem 4.1] pokazuje analogiczny rozkład dla ciągłych funkcjonałów samosprzężonych na nieprzemiennej przestrzeni Schwartza. Także w tym przypadku możemy mówić o minimalności takiego rozkładu. Dowód tego faktu jest konstrukcyjny.

3.2.6. Ideały – praca [H6]

Omawiana praca dotyczy ideałów nieprzemiennej przestrzeni Schwartza. Ograniczamy się do badania ideałów jednostronnych, gdyż z [H1, Theorem 4] wiadomo, że $\mathcal{S}$ jest topologicznie prosta, tzn. jedynymi jej domkniętymi ideałami obustronnymi są ideały trywialne $\{0\}$ oraz $\mathcal{S}$. Badania ideałów jednostronnych w algebrach Banacha (Frécheta) podejmowane były m.in. w [20, 74, 75]. W szczególności Żelazko udowodnił w [74, Theorem 5], że w przemiennej algebrze Frécheta wszystkie ideały są domknięte wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona *noetherowska*, tzn. każdy wstępujący ciąg ideałów się stabilizuje. Następnie uogólnił ten wynik w [75, Theorem] na nieprzemienne algebry Frécheta. Ponieważ nieprzemienna przestrzeń Schwartza nie jest algebrą noetherowską ($I_n := [e_{ij}]_{i\in\mathbb{N}, j=1,\ldots,n}$ $(n \in \mathbb{N})$ tworzą wstępujący ciąg ideałów lewostronnych, który się nie stabilizuje), wyniki Żelazki pokazują, że $\mathcal{S}$ posiada ideały niedomknięte. Możemy jednak pytać o domkniętość jednostronnych ideałów maksymalnych – odpowiedź twierdzącą zawiera [H6, Theorem 5]. Kluczowym elementem w dowodzie tego twierdzenia jest obserwacja, że *ciągi zerowe się rozkładają*. Powiemy, że algebra topologiczna A ma tę własność, gdy dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, dążącego do zera, istnieją: $a \in A$ oraz inny ciąg $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ dążący do zera, takie że $x_n = ay_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Fakt, że w nieprzemiennej przestrzeni Schwartza ciągi zerowe się rozkładają, jest jednocześnie uogólnieniem [H1, Lemma 12]. Pozostaje teraz tylko skorzystać z tego, że jeżeli ciągi zerowe się rozkładają, to prawostronne (tym samym lewostronne, gdy algebra ma inwolucję) ideały maksymalne są domknięte. Fakt ten jest udowodniony dla algebr Banacha w [36, Theorem 3] (porównaj [21, Proposition 2.6.13]), niemniej przenosi sie automatycznie na m-wypukłe algebry Frécheta. Warto w tym miejscu zaznaczyć, że podobne wyniki faktoryzacyjne pojawiają się już w [16]. Istotnym jednak założeniem jest istnienie ograniczonej aproksymacyjnej jedynki, której to własności $\mathcal{S}$ nie posiada. Jeszcze mocniejsze założenie (istnienie

[11] Ale jest różniczkowaniem wewnętrznym do $\mathcal{S}$-modułu $\mathcal{MS}$, zawierającego $\mathcal{S}$. Ilustruje to pewien fenomen różniczkowań: wystarczy bowiem tylko odpowiednio powiększyć moduł, aby każde z nich było wewnętrzne.

[12] Tzn. $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$.

jednostajnie ograniczonej aproksymacyjnej jedynki) wykorzystuje się w dowodzie, iż w m-wypukłych Q-algebrach Frécheta jednostronne ideały maksymalne są domknięte – patrz [1].

Omawiana praca zawiera jeszcze charakteryzację domkniętych ideałów jednostronnych.

Twierdzenie 8 ([H6, Theorem 7]) *Niech I będzie domkniętym ideałem jednostronnym w nieprzemiennej przetrzeni Schwartza.*

(i) Jeżeli I jest ideałem lewostronnym, to istnieje taka domknięta podprzestrzeń $E \subset s'$, że

$$I = \{x \in \mathcal{S}\colon\ x|_E \equiv 0\}.$$

(ii) Jeżeli I jest ideałem prawostronnym, to istnieje taka domknięta podprzestrzeń $E \subset s'$, że

$$I = \{x \in \mathcal{S}\colon\ \overline{\operatorname{im} x} = E^{\perp}\}.$$

W szczególności jedynymi lewostronnymi ideałami maksymalnymi w $\mathcal{S}$ są ideały

$$I_\xi := \{x \in \mathcal{S}\colon\ x(\xi) = 0\} \qquad (\xi \in s' \setminus \{0\}).$$

3.2.7. Nierówność Grothendiecka – praca [H7]

Niezastąpionym źródłem informacji na temat nierówności Grothendiecka jest praca [58]. Przedstawia ona drobiazgowo tło historyczne badań (różne wersje nierówności, od „przemiennej”, poprzez „nieprzemienną” do „operatorowej”) wraz z licznymi zastosowaniami tej nierówności w innych działach matematyki a także fizyce oraz informatyce. Z kolei na stronie `http://www.math.tamu.edu/~gilles.pisier/grothendieck.UNCUT.pdf` ten sam autor umieścił wersję rozszerzoną, która – jak sam zaznacza – stale jest aktualizowana. Z nieco innej perspektywy nierówność ta jest omawiana w [8]. Przedstawiony poniżej krótki opis tej tematyki wzięty jest z [58].

Nierówność Grothendiecka bierze swój początek w [37, §4.2, Théorème 1, s. 59]. Sformułowanie w języku iloczynów tensorowych, jakie tam znajdujemy, jest szczegółowo omówione w [58, §3]. Jako wniosek, otrzymujemy następujący fakt.

Twierdzenie 9 ([37, §4.2, Théorème 3, s. 60]) *Niech Ω_1, Ω_2 będą zbiorami zwartymi. Istnieje uniwersalna stała K spełniająca nastepujący warunek: dla dowolnej ciągłej formy dwuliniowej*[13] *$u\colon C(\Omega_1) \times C(\Omega_2) \to \mathbb{C}$ istnieją takie miary probabilistyczne λ_i na Ω_i $(i = 1, 2)$, że*

$$\forall\, (x_1, x_2) \in C(\Omega_1) \times C(\Omega_2)\colon \quad |u(x_1, x_2)| \leqslant K\|u\|\Big(\int_{\Omega_1} |x_1|^2 d\lambda_1\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\Omega_2} |x_2|^2 d\lambda_2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Optymalną wartość stałej K oznaczamy K_G i nazywamy *stałą Grothendiecka*. Wielkość ta zależy od ciała skalarów, w istocie więc mówimy o dwóch stałych $K_G^{\mathbb{R}}$ oraz $K_G^{\mathbb{C}}$. Istotny wpływ na dalsze badania, związane z powyższą nierównością, miała praca [46], szczególnie poniższy fakt, równoważny nierówności Grothendiecka.

Twierdzenie 10 ([46, Theorem 2.1]) *Niech $(a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathscr{M}_n$ będzie $(n \times n)$-macierzą liczb, która dla dowolnych ciągów n liczb $(\alpha_i)_{i=1}^n, (\beta_j)_{j=1}^n$ spełnia nierówność*

$$\Big|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\alpha_i\beta_j\Big| \leqslant \sup_i |\alpha_i| \sup_j |\beta_j|.$$

[13] Ściśle rzecz biorąc, Grothendieck rozważa formy półtoraliniowe na $C_0(\Omega) \times C_0(\Omega)$ dla lokalnie zwartej przestrzeni topologicznej Ω.

Istnieje uniwersalna stała K spełniająca następujący warunek: dla dowolnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnych, skończonych podzbiorów $(x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^n \subset \mathcal{H}$ zachodzi

$$\Big| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \Big| \leqslant K \sup_i \|x_i\| \sup_j \|y_j\|.$$

Także tym razem optymalna wartość stałej K (właściwa dla dowolnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ oraz dowolnego $n \in \mathbb{N}$) jest równa K_G. Według najlepszej wiedzy autora jej wartość (zarówno nad $\mathbb{R}$, jak i $\mathbb{C}$) jest w dalszym ciągu nieznana. Ostatni postęp dokonał się w pracy [13].

Oryginalne sformułowanie Grothendiecka dotyczyło form dwuliniowych na iloczynie kartezjańskim dwóch przemiennych C^*-algebr. Naturalnym stało się więc pytanie (postawione zresztą przez samego Grothendiecka – patrz [37, §4.6, s. 73]), czy podobnie jest dla dowolnych C^*-algebr. Odpowiedzi twierdzącej – dla form dwuliniowych, spełniających pewnien dodatkowy warunek aproksymacyjny – udzielił najpierw Pisier w pracy [56, Corollary 2.2]. Następnie Haagerup udowdnił odpowiednią nierówność w pełnej ogólności.

Twierdzenie 11 ([40, Theorem 1.1]) *Niech A, B będą C^*-algebrami. Dla dowolnej ciągłej formy dwuliniowej $u\colon A \times B \to \mathbb{C}$ istnieją stany ϕ_1, ϕ_2 na A oraz ψ_1, ψ_2 na B, takie że*

$$\forall\, a \in A, b \in B\colon \quad |u(a,b)| \leqslant \|u\| \big(\phi_1(x^*x) + \phi_2(xx^*)\big)^{\frac{1}{2}} \big(\psi_1(y^*y) + \psi_2(yy^*)\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Kolejną kategorią obiektów, rozważanych w kontekście naszej nierówności, były *przestrzenie operatorowe*. Pod pojęciem tym rozumiemy przestrzeń Banacha E wraz z ustalonym, izometrycznym włożeniem $E \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dla pewnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Włożenie to pozwala rozważać wraz z E cały ciąg przestrzeni $(\mathscr{M}_n(E))_{n\in\mathbb{N}}$ i w rezultacie prowadzi do wielu ciekawych i nietrywialnych wyników a także zaskakujących zastosowań. Więcej na temat teorii przestrzeni operatorowych znaleźć można w [26, 52, 57]. Uzupełnieniem tych monografii jest [7]. Nierówność Grothendiecka dla przestrzeni operatorowych udowodniona została, podobnie jak dla C^*-algebr, w dwóch etapach. Najpierw Pisier i Shlyakhtenko [59, Theorems 0.3, 0.4] podali dowód dla *dokładnych (*ang. *exact) przestrzeni operatorowych*, następnie Haagerup i Musat podali w [41, Proposition 3.12] dowód dla dowolnych przestrzeni operatorowych.

Twierdzenie 12 ([58, Proposition 18.2]) *Załóżmy, że A, B są C^*-algebrami, zaś $E \subset A, F \subset B$ przestrzeniami operatorowymi. Niech ponadto $u\colon E \to F^*$ będzie operatorem całkowicie ograniczonym. Następujące warunki są równoważne:*

(i) dla dowolnych, skończonych podzbiorów $(x_j) \subset E, (y_j) \subset F$ oraz dowolnych liczb $t_j > 0$ zachodzi

$$\Big| \sum \langle ux_j, y_j \rangle \Big| \leqslant \|u\|_{cb} (\|(x_j)\|_R \|(y_j)\|_C + \|(t_j x_j)\|_C \|(t_j^{-1} y_j)\|_R),$$

(ii) istnieją stany ϕ_1, ϕ_2 na A oraz ψ_1, ψ_2 na B, takie że

$$\forall\, (x,y) \in E \times F\colon \quad |\langle ux, y \rangle| \leqslant \|u\|_{cb} \Big(\big(\phi_1(x^*x)\psi_1(yy^*)\big)^{\frac{1}{2}} + \big(\phi_2(xx^*)\psi_2 y^*y)\big)^{\frac{1}{2}} \Big).$$

Istnieje także wersja nierówności Grothendiecka dla *JB^*-triples* – patrz [4, Theorem 1.4].

Omawiana praca [H7] jest próbą przeniesienia tej tematyki poza kategorię przestrzeni/algebr Banacha. Wydaje się, że nieprzemienna przestrzeń Schwartza jest pierwszą algebrą Frécheta, dla której odpowiednia wersja nierówności Grothendiecka jest rozważana. Podobnie, jak u Grothendiecka, także my rozpoczniemy od sformułowania w języku iloczynów tensorowych. Przypomnijmy, że topologia w $\mathcal{S}$ zadana jest przez ciąg $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ norm, zdefiniowanych wzorem

$$\|x\|_n = \sup\left\{|x\eta|_n\colon\ |\eta|_{-n}\leqslant 1\right\},$$

gdzie

$$|\eta|_{-n} = \Big(\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^2 j^{-2n}\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad (\eta\in s')$$

oraz

$$|\xi|_n = \Big(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^2 j^{2n}\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad (\xi\in s).$$

Na algebraicznym iloczynie tensorowym $\mathcal{S}\otimes\mathcal{S}$ definiujemy teraz dwa ciągi norm. Ciąg $(\|\cdot\|_{ah,n})_{n\in\mathbb{N}}$ *modułowych norm tensorowych Haagerupa* dany jest wzorem

$$\|z\|_{ah,n} := \inf\Big\|\sum_{j=1}^{m}|x_j|^2\Big\|_n^{\frac{1}{2}}\Big\|\sum_{j=1}^{m}|y_j|^2\Big\|_n^{\frac{1}{2}},$$

gdzie infimum brane jest względem wszystkich przedstawień $z=\sum_{j=1}^m x_j\otimes y_j$ w $\mathcal{S}\otimes\mathcal{S}$, zaś $|x| := \left(\frac{1}{2}(x^*x+xx^*)\right)^{\frac{1}{2}}\in\mathcal{S}$ jest *modułem* dowolnego operatora $x\in\mathcal{S}$. Z kolei ciąg $(\|\cdot\|_{\pi,n})_{n\in\mathbb{N}}$ *projektywnych norm tensorowych* dany jest wzorem

$$\|z\|_{\pi,n} := \inf\Big\{\sum_{j=1}^{k}\|x_j\|_n\|y_j\|_n\colon\ z=\sum_{j=1}^{k}x_j\otimes y_j,\ x_j,y_j\in\mathcal{S}\Big\}.$$

Nierówność Grothendiecka w nieprzemiennej przestrzeni Schwartza oznacza w istocie ciąg nierówności. Dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ szukamy takiego $k\in\mathbb{N}$, aby spełniony był warunek

$$\exists\ K_n>0\ \ \forall\ z\in\mathcal{S}\otimes\mathcal{S}\colon \qquad \|z\|_{\pi,n}\leqslant K_n\|z\|_{ah,k}. \tag{7}$$

Innymi słowy, topologia projektywna na $\mathcal{S}\otimes\mathcal{S}$ ma być słabsza od topologii zadanej przez modułowe normy tensorowe Haagerupa. Z drugiej jednak strony, topologia projektywna jest najsilniejszą topologią na $\mathcal{S}\otimes\mathcal{S}$, zatem prawdziwość nierówności (7) oznaczałaby równoważność na $\mathcal{S}\otimes\mathcal{S}$ obu rozważanych topologii. Tak oczywiście jest, jako że nieprzemienna przestrzeń Schwartza jest nuklearna w sensie Grothendiecka – patrz [42, Part III, 21.2, Theorem 1]. Możemy więc powiedzieć, że nierówności Grothendiecka w sposób trywialny są spełnione. Powstaje jednak pytanie o optymalność, czyli najmniejsze $k\in\mathbb{N}$, dla którego – przy danym $n\in\mathbb{N}$ – warunek (7) jest prawdziwy. Innymi słowy, pytamy o wartości funkcji $\kappa\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, zdefiniowanej wzorem

$$\kappa(n) := \min\{k\in\mathbb{N}\colon\ \text{zachodzi}\,(7)\}.$$

W omawianej pracy dowodzimy, że

$$\kappa(n) = 2n+1 \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Najpierw pokazujemy w [H7, Theorem 4], że $\kappa(n)\leqslant 2n+1$ oraz $K_n\leqslant\frac{\pi^2}{3}$. Dowód opiera się na umiejętnym wykorzystaniu technik, wypracowanych w teorii C^*-algebr. Dla ciągłej formy dwuliniowej $u\colon\mathcal{S}\times\mathcal{S}\to\mathbb{C}$ otrzymujemy wtedy nierówność

$$\Big|\sum_{j=1}^{m}u(x_j,y_j)\Big|\leqslant\frac{\pi^2}{6}\|u\|_n^*\,\|(x_j)\|_{2n+1}^{\mathrm{RC}}\,\|(y_j)\|_{2n+1}^{\mathrm{RC}},$$

gdzie

$$\|u\|_n^* := \sup\{|u(x,y)|\colon \ \|x\|_n = \|y\|_n = 1\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

oraz

$$\|(x_j)\|_k^{\mathrm{RC}} = \max\left\{\Big\|\sum_{j=1}^m x_j^* x_j\Big\|_k^{\frac{1}{2}}, \Big\|\sum_{j=1}^m x_j x_j^*\Big\|_k^{\frac{1}{2}}\right\} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Dowód tego, że $\kappa(n) \geqslant 2n+1$, jest konstrukcyjny. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ konstruujemy ciąg $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ operatorów na $\mathcal{S}$, spełniający

$$\frac{\|z_k\|_{\pi,n}}{\|z_k\|_{ah,2n}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty.$$

Szczegóły zawiera [H7, Theorem 7]. Ostatnia część omawianej pracy zawiera równoważne sformułowania nierówności Grothendiecka w nieprzemiennej przestrzeni Schwartza.

4. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

4.1. Lista pozostałych publikacji, niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego

[D1] K. Piszczek, *Tame Köthe sequence spaces are quasi-normable*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **52** (2004), no. 4, 405–410.

[D2] K. Piszczek, *Tame (PLS)-spaces*, Funct. Approx. Comment. Math. **38** (2008), no. 1, 67–80.

[D3] K. Piszczek, *On tame pairs of Fréchet spaces*, Math. Nachr. **282** (2009), no. 2, 270–287.

[D4] K. Piszczek, *Quasi-reflexive Fréchet spaces and mean ergodicity*, J. Math. Anal. Appl. **361** (2010), no. 1, 224–233.

[D5] K. Piszczek, *On a property of PLS-spaces inherited by their tensor products*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **17** (2010), no. 1, 155–170.

[D6] K. Piszczek, *Barrelled spaces and mean ergodicity*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM **104** (2010), no. 1, 5–11.

[D7] K. Piszczek, *Quasi-reflexive Fréchet spaces and contractively power bounded operators*, Arch. Math. (Basel) **96** (2011), no. 1, 49–58.

[D8] K. Piszczek, *(DN)-(Ω)-type conditions for Fréchet operator spaces*, Pacific J. Math. **261** (2013), no. 1, 237–256.

[D9] K. Piszczek, *Another mean ergodic characterization of quasi-reflexive spaces*, J. Math. Anal. Appl. **406** (2013), no. 1, 299–306.

[D10] T. Ciaś i K. Piszczek. "The multiplier algebra of the noncommutative Schwartz space". To appear in Banach J. Math. Anal.

4.2. Krótkie omówienie wyników pozostałych publikacji

4.2.1. Przestrzenie oswojone – prace [D1, D2, D3]

Ciągłość operatora liniowego $T\colon X \to Y$ pomiędzy przestrzeniami Frécheta $\big(X, (\|\cdot\|_k)_{k\in\mathbb{N}}\big)$ oraz $\big(Y, (\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ oznacza, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że

$$\sup\left\{\frac{\|Tx\|_n}{\|x\|_k}\colon \ x \neq 0\right\} < \infty. \tag{8}$$

Funkcję $\sigma_T \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, określoną wzorem

$$\sigma_T(n) := \min\{k \in \mathbb{N}\colon \ \text{zachodzi}\,(8)\}$$

nazwiemy *charakterystyką ciągłości* operatora T. O parze (X, Y) przestrzeni Frécheta powiemy, że jest *oswojona*, jeżeli istnieje taka funkcja $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że dla dowolnego operatora $T \in L(X, Y)$ znajdziemy takie $m \in \mathbb{N}$, począwszy od którego zachodzi nierówność $\sigma_T \leqslant \varphi$. Przestrzeń Frécheta X nazwiemy *oswojoną*, gdy para (X, X) jest oswojona. Prace [D1, D3] traktują o takich właśnie obiektach. W szczególności pokazujemy w [D1, Proposition 5], że oswojone przestrzenie Frécheta posiadają ciągłą normę, z kolei [D1, Theorem 6] dowodzi, że oswojone przestrzenie ciągowe typu Köthego $\lambda_p(A)$ są quasi-normowalne. O przestrzeni Frécheta E powiemy, że jest *quasi-normowalna* (patrz [49, Proposition 26.18]), jeżeli dla dowolnego krótkiego ciągu dokładnego

$$0 \to E \xrightarrow{I} F \xrightarrow{Q} G \to 0$$

przestrzeni Frécheta z ciągłymi odwzorowaniami liniowymi I, Q, ciąg dualny

$$0 \to G' \xrightarrow{Q'} F' \xrightarrow{I'} E' \to 0$$

jest *topologicznie dokładny*, tzn. odwzorowania $\overline{Q'}\colon G'/\ker Q' \to \operatorname{im} Q'$ oraz $\overline{I'}\colon F'/\ker I' \to \operatorname{im} I'$, indukowane przez – odpowiednio – Q' oraz I', są izomorfizmami przestrzeni lokanie wypukłych.

Praca [D3] jest kontynuacją powyższych badań. W szczególności podajemy charakteryzację par oswojonych – [D3, Theorem 2.1]. Następnie pokazujemy, że każda oswojona przestrzeń Frécheta jest quasi-normowalna – [D3, Corollary 3.3]. Jest to uogólnienie wyniku [D1, Theorem 6]. Ten sam fakt, za pomocą innej metody, został pokazany później w [2]. Ostatnia część pracy [D3] charakteryzuje pary oswojone, gdy jedna z przestrzeni jest przestrzenią szeregów potęgowych (skończonego, bądź nieskończonego typu).

Oswojoność można także zdefiniować w kategorii PLS-przestrzeni – patrz [D2, Definition 1]. Po definicję i własnści PLS-przestrzeni odsyłamy czytelnika do [23]. W tym miejscu wymieńmy tylko kilka przykładów obiektów tej kategorii: przestrzeń $\mathscr{A}(\Omega)$ funkcji analitycznych zmiennych rzeczywistych na zbiorze otwarym $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, przestrzeń dystrybucji $\mathscr{D}'(\Omega)$ czy też przestrzeń $L(E)$ operatorów liniowych, ciągłych na nuklearnej przestrzeni Frécheta E. Praca [D2] zawiera wyniki dotyczące oswojonych PLS-przestrzeni. Podajemy warunki równoważne na to, aby PLS-przestrzeń była oswojona – patrz [D2, Theorem 8]. Charakteryzujemy także oswojone PLS-przestrzenie szeregów potęgowych – patrz [D2, Theorems 11, 12].

4.2.2. Średnia ergodyczność – prace [D4, D6, D7, D9]

Omawiane prace dotyczą przestrzeni średnio ergodycznych. Rozpoczniemy od przypomnienia kilku definicji. Powiemy, że:

(1) operator liniowy, ciągły T na ptrzestrzeni Banacha X jest:

(i) *średnio ergodyczny*, jeżeli dla każdego $x \in X$ istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^k x,$$

(ii) *potęgowo ograniczony*, jeżeli

$$\sup\left\{\|T^k\|\colon \ k \in \mathbb{N}\right\} < \infty,$$

(2) przestrzeń Banacha X jest *średnio ergodyczna*, jeżeli każdy potęgowo ograniczony operator $T \in L(X)$ jest średnio ergodyczny.

Historia badania związku pomiędzy obiema – zdefiniowanymi powyżej – klasami operatorów sięga początku lat 30-tych ubiegłego wieku, kiedy to von Neumann pokazał w [51], że operatory unitarne na przestrzeni Hilberta są średnio ergodyczne. Następnie Riesz pokazał w [61, Theorem 2], że przestrzenie L^p $(1 < p < \infty)$ są średnio ergodyczne. Rok później, Lorch pokazał w [47, Theorem 2], że refleksywne przestrzenie Banacha są średnio ergodyczne. Wynik Lorcha dało się, w dużej ogólności, odwrócić. Okazało się, że jeżeli przestrzeń Banacha ma bazę Schudera, to jest ona refleksywna wtedy i tylko wtedy, gdy jest średnio ergodyczna – patrz [31, Corollary 1]. Podobne charakteryzacje podano dla przestrzeni skończenie wymiarowych – [31, Corollary 3] oraz quasi-refleksywnych rzędu 1[14] – [31, Theorem 5]. Dwie pierwsze z powyższych charakteryzacji udało się przenieść na przestrzenie Frécheta z bazą – patrz [3, Theorems 1.3, 1.4]. Z kolei charakteryzacja 1-quasi-refleksywnych przestrzeni Frécheta z bazą została uzyskana w [D4, Theorem 12]. Wynik ten rozpoczął serię publikacji na temat związku pomiędzy quasi-refleksywnością a średnią ergodycznością przestrzeni lokalnie wypukłych. W największej ogólności charakteryzacja – w terminach własności średnioergodycznych – quasi-refleksywnych przestrzeni z bazą została podana w pracy [D6].

Twierdzenie 13 ([D6, Theorem 9]) *Niech X będzie zupełną przestrzenią beczkową*[15] *z bazą Schaudera, która nie jest refleksywna. Następujące warunki są równoważne:*

(i) X jest quasi-refleksywna rzędu 1,

(ii) dla każdego operatora potęgowo ograniczonego $T \in L(X)$, co najmniej jeden z operatorów $T\colon X \to X$, $T'\colon X' \to X'$ jest średnio ergodyczny.

Publikacja [D7] opisuje własności średnio ergodyczne szczególnej klasy operatorów na 1-quasi-refleksywnych przestrzeniach Frécheta. Zwłaszcza [D7, Theorem 5.1] prowokuje do luźnej konstatacji, iż refleksywne i nierefleksywne przestrzenie Frécheta są sobie bliskie (w sensie własności średnio ergodycznych tej szczególnej klasy operatorów).

W pracy [D9] wracamy po raz kolejny do charakteryzacji przestrzeni quasi-refleksywnych rzędu 1. Tym razem wyrażamy ją w terminach własności średnio ergodycznych ciągłych półgrup operatorów – patrz [D9, Theorem 6].

4.2.3. Iloczyny tensorowe PLS-przestrzeni – praca [D5]

Centralnym pojęciem omawianego artykułu jest *sprzężone oszacowanie interpolacyjne*. Jego definicję, pominiętą tutaj ze względu na techniczny charakter, znaleźć można w [10]. Ważnym zastosowaniem tego narzędzia jest teoria rozszczepiania krótkich ciągów dokładnych i wyznaczania funktora Ext w kategorii PLS-przestrzeni – patrz [9, 11]. W publikacji [D5] badamy własności dziedziczenia sprzężonego oszacowania interpolacyjnego przez iloczyny tensorowe PLS-przestrzeni.

4.2.4. Operatorowe przestrzenie Frécheta – praca [D8]

Termin „przestrzeń operatorowa” zarezerwowany był pierwotnie dla przestrzeni Banacha. Naturalnym stało się poszukiwanie odpowiedniej definicji dla innych, nie tylko unormowanych, przestrzeni liniowo-topologicznych. Dla przestrzeni lokalnie wypukłych definicja taka nasuwa się w sposób naturalny. Otóż

[14] Przestrzeń Banacha X jest *quasi-refleksywna rzędu n* (inaczej *n-quasi-refleksywna*), gdy $\dim(X^{**}/X) = n$.
[15] Definicję przestrzeni beczkowej znaleźć można w [49, s. 271].

powiemy, że V jest *lokalnie wypukłą przestrzenią operatorową*, jeśli jest granicą projektywną[16] systemu projektywnego (X_μ, ρ_μ^ν), przy czym wszystkie X_μ są przestrzeniami operatorowymi, zaś odwzorowania łączące ρ_μ^ν są całkowicie ograniczone. Twierdzenie o bipolarze dla lokalnie wypukłych przestrzeni operatorowych zostało udowodnione najpierw (w szczególnej wersji) w [28, Corollary 5.5], zaś w pełniej ogólności w [27, Proposition 4.1]. Z kolei operatorowy odpowiednik twierdzenia Kreina-Milmana uzyskano w [73, Theorem 4.3]. Fakt, że pojęcia abstrakcyjnej i konkretnej lokalnie wypukłej przestrzeni operatorowej są tożsame (udowodniony dla przestrzeni operatorowych przez Ruana w [63, Theorem 3.1]) został pokazany w [24, Theorem 7.1].

W omawianym artykule badamy operatorowe wersje warunków typu $(DN)-(\Omega)$, których definicje teraz przywołamy. Niech $(X, (\|\cdot\|)_{n\in\mathbb{N}})$ będzie przestrzenią Frécheta. Powiemy, że:

(i) $X \in (DN)$, jeżeli

$$\exists\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, q \in \mathbb{N}\ \exists\, r \in \mathbb{N}, C > 0\colon\quad \|x\|_q^2 \leqslant C\|x\|_p\|x\|_r \qquad (x \in X),$$

(ii) $X \in (\Omega)$, jeżeli

$$\forall\, p \in \mathbb{N}\ \exists\, q \in \mathbb{N}\ \forall\, r \in \mathbb{N}\ \exists\, C > 0\colon\quad (\|y\|_q^*)^2 \leqslant C\|y\|_p^*\|y\|_r^* \qquad (y \in X').$$

Warunki te odgrywają ważną rolę w teorii rozszczepiania krótkich ciągów dokładnych przestrzeni Frécheta – patrz [49, Theorem 30.1]. Pozwoliły także scharakteryzować podprzestrzenie ([71, Satz 1.7]) oraz ilorazy i podprzestrzenie dopełnialne ([72, Sätze 1.8, 1.10]) przestrzeni s ciągów szybko malejących. Pracę [D8] rozpoczynamy od zdefiniowania operatorowych odpowiedników (oDN) oraz $(o\Omega)$ powyższych warunków. Następnie pokazujemy, że warunki te są dziedziczone przez kanoniczne kwantyzacje[17] oraz biduale przestrzenie operatorowe.

Twierdzenie 14 ([D8])

(1) Dla dowolnej przestrzeni Frécheta X zachodzą następujące relacje:

(i) $X \in (DN) \Leftrightarrow \min X \in (oDN) \Leftrightarrow \max X \in (oDN)$,

(ii) $X \in (\Omega) \Leftrightarrow \min X \in (o\Omega) \Leftrightarrow \max X \in (o\Omega)$.

(2) Dla dowolnej przestrzeni Frécheta-Hilberta H zachodzą następujące relacje:

(i) $H \in (DN) \Leftrightarrow H_c \in (oDN) \Leftrightarrow H_r \in (oDN) \Leftrightarrow OH \in (oDN)$,

(ii) $H \in (\Omega) \Leftrightarrow H_c \in (o\Omega) \Leftrightarrow H_r \in (o\Omega) \Leftrightarrow OH \in (o\Omega)$.

(3) Dla dowolnej operatorowej przestrzeni Frécheta X zachodzą następujące relacje:

(i) $X \in (oDN) \Leftrightarrow X'' \in (oDN)$,

(ii) $X \in (o\Omega) \Leftrightarrow X'' \in (o\Omega)$.

[16] Każda przestrzeń lokalnie wypukła taką granicą jest – patrz [49, Remark 24.5].
[17] Kwantyzacje omówione są w [26, części 3.3, 3.4].

4.2.5. Algebra multiplikatorów – praca [D10]

W omawianej pracy zajmujemy się algerbą multiplikatorów $\mathcal{MS}$ nieprzemiennej przestrzeni Schwartza. Algebra ta ma związek z teorią operatorów nieograniczonych na przestrzeni Hilberta, teorią O^*-algebr – patrz [67] a także teorią PLS-przestrzeni – patrz [D10, Corollary 4.2]. Jest to także algebra macierzy nieskończonych, których współczynniki spełniają pewien warunek wzrostu – patrz [D10, Proposition 4.3]. W szczególności potrafimy bardzo łatwo wskazać macierz, która nie jest elementem nieprzemiennej przestrzeni Schwartza, ale jest jej multiplikatorem, np. $u = \sum_{j=1}^{\infty} e_{jj}$. O istnieniu takich operatorów wspominaliśmy już w części 3.2.4, omawiając wyniki pracy [H4]. Struktura liniowo-topologiczna tej algebry jest bardziej skomplikowana, niż nieprzemiennej przestrzeni Schwartza. Dlatego też istotne było zbadanie dostępności podstawowych narzędzi analizy funkcjonalnej, takich jak twierdzenie o odwzorowaniu otwartym, twierdzenie o domkniętym wykresie czy też zasada jednostajnej ograniczoności. W toku badań okazało się (patrz [D10, Theorem 4.5]), że wszystkie te twierdzenia w algebrze multiplikatorów zachodzą. Jako PLS-przestrzeń, $\mathcal{MS}$ spełnia także sprzężone oszacowanie interpolacyjne – patrz [D10, Proposition 4.8].

Literatura

[1] M. Abel, *Fréchet algebras in which all maximal one-sided ideals are closed*, Far East J. Math. Sci. (FJMS) **10** (2003), no. 3, 323–329.

[2] A. A. Albanese, *An alternate proof of "tame Fréchet spaces are quasi-normable"*, Note Mat. **33** (2013), no. 2, 143–147.

[3] A. A. Albanese, J. Bonet i W. J. Ricker, *Mean ergodic operators in Fréchet spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **34** (2009), no. 2, 401–436.

[4] T. Barton i Y. Friedman, *Grothendieck's inequality for JB^*-triples and applications*, J. London Math. Soc. (2) **36** (1987), no. 3, 513–523.

[5] S. Bhatt, A. Inoue i H. Ogi, *Spectral invariance, K-theory isomorphism and an application to the differential structure of C^*-algebras*, J. Operator Theory **49** (2003), no. 2, 389–405.

[6] B. Blackadar i J. Cuntz, *Differential Banach algebra norms and smooth subalgebras of C^*-algebras*, J. Operator Theory **26** (1991), no. 2, 255–282.

[7] D. P. Blecher i C. Le Merdy, *Operator algebras and their modules—an operator space approach.* T. 30. London Mathematical Society Monographs. New Series. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2004, s. x+387.

[8] R. Blei, *The Grothendieck inequality revisited*, Mem. Amer. Math. Soc. **232** (2014), no. 1093, vi+90.

[9] J. Bonet i P. Domański, *Parameter dependence of solutions of differential equations on spaces of distributions and the splitting of short exact sequences*, J. Funct. Anal. **230** (2006), no. 2, 329–381.

[10] J. Bonet i P. Domański, *The structure of spaces of quasianalytic functions of Roumieu type*, Arch. Math. (Basel) **89** (2007), no. 5, 430–441.

[11] J. Bonet i P. Domański, *The splitting of exact sequences of PLS-spaces and smooth dependence of solutions of linear partial differential equations*, Adv. Math. **217** (2008), no. 2, 561–585.

[12] J.-B. Bost, *Principe d'Oka, K-théorie et systèmes dynamiques non commutatifs*, Invent. Math. **101** (1990), no. 2, 261–333.

[13] M. Braverman i in., *The Grothendieck constant is strictly smaller than Krivine's bound*, Forum Math. Pi **1** (2013), e4, 42.

[14] N. P. Brown i N. Ozawa, *C^*-algebras and finite-dimensional approximations.* T. 88. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008, s. xvi+509.

[15] T. Ciaś, *On the algebra of smooth operators*, Studia Math. **218** (2013), no. 2, 145–166.

[16] P. J. Cohen, *Factorization in group algebras*, Duke Math. J **26** (1959), 199–205.

[17] A. Connes, *On the cohomology of operator algebras*, J. Functional Analysis **28** (1978), no. 2, 248–253.

[18] A. Connes, *Noncommutative geometry.* Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994, s. xiv+661.

[19] J. Cuntz, "Cyclic theory and the bivariant Chern-Connes character", *Noncommutative geometry.* T. 1831. Lecture Notes in Math. Berlin: Springer, 2004, s. 73–135.

[20] H. G. Dales i W. Żelazko, *Generators of maximal left ideals in Banach algebras*, Studia Math. **212** (2012), no. 2, 173–193.

[21] H. Dales, *Banach algebras and automatic continuity.* T. 24. London Mathematical Society Monographs. New Series. Oxford Science Publications. New York: The Clarendon Press Oxford University Press, 2000, s. xviii+907.

[22] P. Domański. "Algebra of smooth operators". `http://main3.amu.edu.pl/~domanski/salgebra1.pdf` (umieszczone 11.01.2012).

[23] P. Domański, "Classical PLS-spaces: spaces of distributions, real analytic functions and their relatives", *Orlicz centenary volume.* T. 64. Banach Center Publ. Polish Acad. Sci., Warsaw, 2004, s. 51–70.

[24] A. Dosiev, *Local operator spaces, unbounded operators and multinormed C^*-algebras*, J. Funct. Anal. **255** (2008), no. 7, 1724–1760.

[25] D. Dubin i M. Hennings, *Quantum mechanics, algebras and distributions.* T. 238. Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990, s. viii+238.

[26] E. Effros i Z.-J. Ruan, *Operator spaces.* T. 23. London Mathematical Society Monographs. New Series. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000, s. xvi+363.

[27] E. Effros i C. Webster, "Operator analogues of locally convex spaces", *Operator algebras and applications (Samos, 1996).* T. 495. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, s. 163–207.

[28] E. Effros i S. Winkler, *Matrix convexity: operator analogues of the bipolar and Hahn-Banach theorems*, J. Funct. Anal. **144** (1997), no. 1, 117–152.

[29] G. Elliott, T. Natsume i R. Nest, *Cyclic cohomology for one-parameter smooth crossed products*, Acta Math. **160** (1988), no. 3-4, 285–305.

[30] J. Esterle, *Picard's theorem, Mittag-Leffler methods, and continuity of characters on Fréchet algebras*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **29** (1996), no. 5, 539–582.

[31] V. P. Fonf, M. Lin i P. Wojtaszczyk, *Ergodic characterizations of reflexivity of Banach spaces*, J. Funct. Anal. **187** (2001), no. 1, 146–162.

[32] M. Fragoulopoulou, *Topological algebras with involution.* T. 200. North-Holland Mathematics Studies. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2005, s. xvi+495.

[33] F. Ghahramani i R. J. Loy, *Generalized notions of amenability*, J. Funct. Anal. **208** (2004), no. 1, 229–260.

[34] F. Ghahramani, R. J. Loy i Y. Zhang, *Generalized notions of amenability. II*, J. Funct. Anal. **254** (2008), no. 7, 1776–1810.

[35] H. Glöckner i B. Langkamp, *Topological algebras of rapidly decreasing matrices and generalizations*, Topology Appl. **159** (2012), no. 9, 2420–2422.

[36] M. Green, *Maximal one-sided ideals in Banach algebras*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **80** (1976), no. 1, 109–111.

[37] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. São Paulo **8** (1953), 1–79.

[38] A. Grothendieck, *Un résultat sur le dual d'une C^*-algèbre*, J. Math. Pures Appl. (9) **36** (1957), 97–108.

[39] U. Haagerup, *All nuclear C^*-algebras are amenable*, Invent. Math. **74** (1983), no. 2, 305–319.

[40] U. Haagerup, *The Grothendieck inequality for bilinear forms on C^*-algebras*, Adv. in Math. **56** (1985), no. 2, 93–116.

[41] U. Haagerup i M. Musat, *The Effros-Ruan conjecture for bilinear forms on C^*-algebras*, Invent. Math. **174** (2008), no. 1, 139–163.

[42] H. Jarchow, *Locally convex spaces.* Mathematische Leitfäden. Stuttgart: B. G. Teubner, 1981, s. 548.

[43] B. E. Johnson, *Cohomology in Banach algebras.* Memoirs of the American Mathematical Society, No. 127. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1972, s. iii+96.

[44] B. E. Johnson, *Weak amenability of group algebras*, Bull. London Math. Soc. **23** (1991), no. 3, 281–284.

[45] P. Lawson i C. J. Read, *Approximate amenability of Fréchet algebras*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **145** (2008), no. 2, 403–418.

[46] J. Lindenstrauss i A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications*, Studia Math. **29** (1968), 275–326.

[47] E. R. Lorch, *Means of iterated transformations in reflexive vector spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **45** (1939), 945–947.

[48] Z. Lykova, *Cyclic cohomology of certain nuclear Fréchet and DF algebras*, Cent. Eur. J. Math. **6** (2008), no. 3, 405–421.

[49] R. Meise i D. Vogt, *Introduction to functional analysis.* T. 2. Oxford Graduate Texts in Mathematics. Translated from the German by M. S. Ramanujan and revised by the authors. New York: The Clarendon Press Oxford University Press, 1997, s. x+437.

[50] E. A. Michael, *Locally multiplicatively-convex topological algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., **No. 11** (1952), 79.

[51] J. von Neumann, *Proof of the Quasi-Ergodic Hypothesis*, PNAS **18** (1932), no. 1, 70–82.

[52] V. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras.* T. 78. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, s. xii+300.

[53] N. Phillips, *K-theory for Fréchet algebras*, Internat. J. Math. **2** (1991), no. 1, 77–129.

[54] A. Y. Pirkovskii, "Homological dimensions and approximate contractibility for Köthe algebras", *Banach algebras 2009.* T. 91. Banach Center Publ. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2010, s. 261–278.

[55] A. Pirkovskii, *Flat cyclic Fréchet modules, amenable Fréchet algebras, and approximate identities*, Homology, Homotopy Appl. **11** (2009), no. 1, 81–114.

[56] G. Pisier, *Grothendieck's theorem for noncommutative C^*-algebras, with an appendix on Grothendieck's constants*, J. Funct. Anal. **29** (1978), no. 3, 397–415.

[57] G. Pisier, *Introduction to operator space theory.* T. 294. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 2003, s. viii+478.

[58] G. Pisier, *Grothendieck's theorem, past and present*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **49** (2012), no. 2, 237–323.

[59] G. Pisier i D. Shlyakhtenko, *Grothendieck's theorem for operator spaces*, Invent. Math. **150** (2002), no. 1, 185–217.

[60] C. J. Read, *Derivations with large separating subspace*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 12, 3671–3677 (electronic).

[61] F. Riesz, *Some Mean Ergodic Theorems*, J. Lond. Math. Soc. **13** (1938), no. 4, 274–278.

[62] J. R. Ringrose, *Automatic continuity of derivations of operator algebras*, J. London Math. Soc. (2) **5** (1972), 432–438.

[63] Z.-J. Ruan, *Subspaces of C^*-algebras*, J. Funct. Anal. **76** (1988), no. 1, 217–230.

[64] V. Runde, *Lectures on amenability.* T. 1774. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002, s. xiv+296.

[65] S. Sakai, *Derivations of W^*-algebras*, Ann. of Math. (2) **83** (1966), 273–279.

[66] S. Sakai, *Derivations of simple C^*-algebras*, J. Functional Analysis **2** (1968), 202–206.

[67] K. Schmüdgen, *Unbounded operator algebras and representation theory.* T. 37. Operator Theory: Advances and Applications. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990, s. 380.

[68] L. Schweitzer, *Spectral invariance of dense subalgebras of operator algebras*, Internat. J. Math. **4** (1993), no. 2, 289–317.

[69] M. P. Thomas, *Local power series quotients of commutative Banach and Fréchet algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 5, 2139–2160 (electronic).

[70] M. P. Thomas, *Reduction of discontinuity for derivations on Fréchet algebras*, J. Lond. Math. Soc. (2) **76** (2007), no. 1, 165–180.

[71] D. Vogt, *Charakterisierung der Unterräume von s*, Math. Z. **155** (1977), no. 2, 109–117.

[72] D. Vogt i M. J. Wagner, *Charakterisierung der Quotientenräume von s und eine Vermutung von Martineau*, Studia Math. **67** (1980), no. 3, 225–240.

[73] C. Webster i S. Winkler, *The Krein-Milman theorem in operator convexity*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), no. 1, 307–322.

[74] W. Żelazko, *A characterization of commutative Fréchet algebras with all ideals closed*, Studia Math. **138** (2000), no. 3, 293–300.

[75] W. Żelazko, *A characterization of F-algebras with all one-sided ideals closed*, Studia Math. **168** (2005), no. 2, 135–145.

Krzysztof Piszczek