Jan Dymara
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski
dymara@math.uni.wroc.pl

Wrocław, 8.VI.2014

Recenzja rozprawy doktorskiej Sylwii Antoniuk
pt. "Sharp threshold functions for some properties of random groups"

Rozprawa dotyczy trójkątnego modelu grupy losowej $\Gamma(n,p)$. Budujemy tę grupę następująco. Bierzemy n generatorów; następnie losujemy relacje: każde nieskracalne słowo długości 3 losujemy (niezależnie) z prawdopodobieństwem p. Gdy n dąży do nieskończoności, a p zmienia w sposób dostosowany do n (np. $p = p(n) = n^\alpha$), otrzymana grupa z dążącym do 1 prawdopodobieństwem:

- jest trywialna ($-3/2 + \epsilon < \alpha$);
- jest nieskończona, hiperboliczna, i ma własność (T) Każdana ($-2+\epsilon < \alpha < -3/2-\epsilon$);
- jest nieabelową grupą wolną ($\alpha < -2 - \epsilon$);

Te wyniki (w nieco innych modelach) zostały uzyskane wcześniej przez Gromova, Olliviera, Żuka i Kotowskich.

Autorka (w znacznej mierze we współpracy z Friedgutem, Łuczakiem i Świątkowskim) bada dokładniej miejsca przejść fazowych ($\alpha = -3/2, -2$). Otrzymuje następujące wyniki (przy $n \to \infty$, z dążącym do 1 prawdopodobieństwem).

1. Dla $1.2n^{-3/2} \leq p$ grupa jest trywialna.
2. Dla $p \leq n^{-3/2-(\log n)^{-1/3}\log\log n}$ grupa jest nieskończona i hiperboliczna.
3. Dla $Cn^{-2}\log n \leq p$ grupa jest Każdana (C to pewna stała).
4. Dla $C'n^{-2} \leq p \leq c'n^{-2}\log n$ grupa nie jest ani wolna, ani Każdana (C', c' to pewne stałe).
5. Dla $p \leq cn^{-2}$ grupa jest wolna (o ile $c < 0.1$).

   Ponadto dowodzi istnienia bardzo ostrego przejścia fazowego dla trywialności:
6. Istnieje funkcja $c(n)$, taka że grupa jest trywialna dla $(1+\epsilon)c(n) \leq p$ i nietrywialna dla $p \leq (1-\epsilon)c(n)$.

Główną motywacją dla takiego "rozdrapywania" miejsc krytycznych jest nadzieja znalezienia nowych (krótszych) faz, a w nich może nawet grup o nowych własnościach. Do tej motywacji najbardziej bezpośrednio odnoszą się wyniki 4.(pozytywnie) i 6.(negatywnie). Po bliższym przyjrzeniu się 4. nie okazuje się, niestety, aż tak fascynujący: grupa nie jest wolna, bo w miarę łatwo pokazuje się dodatniość jej charakterystyki Eulera; nie jest Każdana, bo odszczepia czynnik wolny. Wynik 6. odwołuje się do spektakularnego tw. Fridguta, charakteryzującego własności z bardzo ostrym przejściem fazowym jako w pewnym sensie nielokalne.

W teorii grup losowych przejścia fazowe były przedtem zrozumiane w sposób dużo mniej subtelny niż w teorii grafów losowych. Tymczasem teorie te powinny być ze sobą dość ściśle związanie. Aż się więc prosiło, by je powiązać, najlepiej tak, żeby wyniki dotyczące grafów losowych dało się zastosować do grup. W rozprawie ta potrzeba zostaje zrealizowana: większość dowodów wiąże z wylosowaną prezentacją grupy pewien graf, bada jego własności i wnioskuje z nich o własnościach grupy. Ogólnie rzecz biorąc, wierzchołkami grafu są generatory grupy, a krawędzie stawiamy tam, gdzie prezentacja wymusza równość generatorów. Ale szczegóły są w różnych dowodach różne, zwykle pomysłowo i subtelnie dopasowane do problemu. Część analizy grafów udaje się wykonać standardowymi technikami probabilistycznymi (Kandydatka bardzo sprawnie używa nierówności Czebyszewa); ale też użyte są nowe i kwalifikujące się jako poważniejsza technologia wyniki (Coja-Oghlan (2007), Molloy (2005)).

Podsumowując, uważam, że jest to świetna rozprawa doktorska. Jest oparta na wyraźnej, nowej idei: grafy losowe są potężnym narzędziem w teorii grup losowych. Ta idea zostaje skutecznie wyegzekwowana i prowadzi do znaczącego ulepszenia wcześniejszych wyników. Dowody zarówno pomysłowo i kompetentnie używają podstawowych technik, jak i odwołują się do świeżych twierdzeń. Aparat matematyczny obecny w pracy jest bardzo obszerny: grafy losowe, grupy losowe, własność Każdana, dyskretny laplasjan, diagramy van Kampena, nierówność izoperymetryczna, procesy gałązkowe.

W stosunku do redakcji rozprawy nie jestem już tak entuzjastyczny. Głowna część jest pisana w standardowym stylu prac matematycznych (czemu nie jestem przeciwny). Poprzedzona jest obszernymi preliminariami, do których w trakcie czytania zaglądałem i zawsze znajdowałem w nich to co trzeba.

Przy odwołaniach do Olliviera i Molloya było mi trudniej. Autorka odsyła do dowodów z ich prac, przy czym potrzebuje wersji nieco zmodyfikowanych; sama rozprawa już mi nie wystarczała, a wskazówki, jak czytać oryginały, okazały się nieco skąpe.

I wreszcie, miałem problemy z niektórymi detalami. Na przykład w lemacie 26 nie umiem w opisany w dowodzie sposób dostać dolnego szacowania przez $6n$. (Umiem dostać $5n$ albo i $6n + o(n)$, co dalej w zupełności wystarczy.) Na dole strony 30 rozmiar diagramu van Kampena jest oszacowany nieco zbyt optymistycznie. (Bez poważnych konsekwencji dla dalszego toku rozumowania.)

Stwierdzam, że rozprawa spełnia warunki stawiane rozprawom doktorskim. Oceniam, że uzasadnia ona nadanie Kandydatce stopnia naukowego doktora nauk matematycznych.

Jan Dymara