Prof. dr hab. Władysław Narkiewicz
emerytowany profesor
Instytutu Matematycznego
Uniwersytetu Wrocławskiego
50-384 WROCŁAW
Plac Grunwaldzki 2-4
E-mail: narkiew@math.uni.wroc.pl

29. 11. 2013.

Recenzja pracy doktorskiej

mgra Karola Gierszewskiego

Oszacowania dolne dla współczynników Dirichleta odwrotności funkcji z wybranych podklas z klasy Selberga

1. Autor rozprawy zajmuje się odwrotnościami tych funkcji $F(s)$ z klasy Selberga, które w swym równaniu funkcyjnym mają jeden czynnik typu Gamma, a więc spełniają równanie postaci

$$\Phi(s) = \omega\overline{\Phi(1-\overline{s})},$$

gdzie

$$\Phi(s) = Q^s\Gamma(\lambda s + \mu)F(s),$$

przy czym $Q > 0$, $\lambda > 0$, $\Re\mu > 0$, $\omega = 1$.

Zbiór S^Γ takich funkcji zawiera wiele interesujących obiektów. Jako ich przykłady autor wymienia wszystkie funkcje $L(s,\chi)$ i $\zeta(s)L(s,\chi)$ z pierwotnymi charakterami χ Dirichleta, funkcje L dla nowych form ("newforms") modularnych a zatem, na mocy udowodnionej przed kilku laty hipotezy Shimury-Taniyamy, funkcje L krzywych eliptycznych nad ciałem liczb wymiernych.

Celem pracy jest dowód trzech twierdzeń o funkcjach z rodziny S^Γ. Pierwsze z nich (twierdzenie 2.1) pokazuje, że jeśli $\in S^\Gamma$, to funkcja zdefiniowana dla w w górnej półpłaszczyźnie wzorem

$$m(F,w) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{sw}}{F(s)}ds$$

(gdzie C jest pewnym konturem leżącym w górnej półpłaszczyźnie i zależnym od F), przedłuża się do funkcji meromorficznej na płaszczyźnie z biegunami z residuum równym $-\mu_F(n)/2\pi i$ w punktach $w = \log n$, gdzie n jest liczbą naturalną, spełniającą $\mu_F(n) \neq 0$, przy czym ciąg $\mu_F(n)$ jest ciągiem współczynników szeregu Dirichleta dla funkcji $1/F(s)$, tj.

$$\frac{1}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_F(n)}{n^s}$$

dla $\Re s > 1$.

Pozostałe dwa twierdzenia dotyczą oszacowań typu Ω dla pewnych sum związanych z ciągiem współczynników $\mu_F(n)$. W pierwszym z nich (twierdzenie 3.1) autor pokazuje, że trzy poniższe sumy

$$S_1(x) = \sum_{n\le x} \mu_E(n),$$

$$S_2(x;a) = \sum_{n\le x} \mu_E(n)(x/n)^{1/4} \cos\left(a(x/n)^{1/2}\right), \quad (a \neq 0)$$

$$S_3(x) = \sum_{n\le x} \mu_E(n)(x/n)^{1/2},$$

nie mogą być równocześnie zbyt małe.

Ostatnie twierdzenie (twierdzenie 3.2)) jest prostym wnioskiem z poprzedniego twierdzenia i stwierdza, że jeśli $g(x)$ jest funkcją rzeczywistą klasy C^1, rosnącą monotonicznie do nieskonczoności dla dostatecznie dużych x, iloczyn $xg'(x)$ jest ograniczony, a nadto $g(x) = o(\log\log x)$, to mamy

$$S_3(x) = \Omega(x^{1/2}g(x)),$$

lub dla wszystkich niezerowych a zachodzi

$$S_2(x;a) = \Omega(x^{1/2}g(x)).$$

2. Otrzymane wyniki są uogólnieniami rezultatów otrzymanych wcześniej przez Bartz (Acta Arith. 57, 1991, 283–293), Kaczorowskiego (J. London Math. Soc. (2) 75, 2007, 509–521) i Łydkę (praca doktorska, na stronie UAM oraz Canadian Math. Bull.). Pani Bartz udowodniła twierdzenie 2.1 w przypadku $F(s) = \zeta(s)$, prof. Kaczorowski uzyskał pewne tzw. "wzory dokładne" dla funkcji $m(\zeta, w)$, które wykorzystał do pokazania, że sumy

$$\sum_{n\le x} \mu(n)$$

i

$$\sum_{n\le x} \mu(n)\cos(ax/n)$$

nie mogą być równocześnie $O(\sqrt{x}\log\log x)$. W swej pracy doktorskiej dr Łydka udowodnił m.in. twierdzenie 2.1 w przypadku, gdy F jest funkcją L krzywej eliptycznej.

Autor zajął się zbadaniem sytuacji ogólniejszej i pokazał, że metody użyte przez jego poprzedników można zmodyfikować tak, by posłużyły do dowodów podobnych rezultatów i w tym przypadku. Jest to ciekawy krok do przodu i wydaje mi się, że powinien doprowadzić do zbadania, czy nie można uzyskać podobnych wyników dla szerszych klas funkcji z klasy Selberga, np. dla funkcji zeta Dedekinda ciał.

3. Recenzowana rozprawa składa się z trzech rozdziałów. W pierwszym z nich przedstawione są lematy i twierdzenia pomocnicze, używane w następnych rozdziałach. Budzi pewne zdziwienie pojawienie się tu wielu wyników podręcznikowych, takich jak sumowanie przez części (lematy 1.1 i 1.4 oraz wnioski 1.2 i 1.3), twierdzenie o mnożeniu absolutnie zbieżnych szeregów liczbowych (lemat 1.6), twierdzenia o całkowaniu (lematy 1.8, 1.9 i 1.10), nierówność Cauchy'ego-Schwarza (lemat 1.11), czy też twierdzenie o residuach (lemat 1.12).

Rozdział drugi poświęcony jest dowodowi twierdzenia 2.1. Podany on jest w sposób precyzyjny, z uzasadnieniami wszystkich, nawet drobnych, kroków pośrednich, co znakomicie ułatwia sprawdzenie przedstawionych rachunków. Podobnie jest i w znacznie dłuższym rozdziale trzecim, w którym znajdujemy dowód twierdzeń 3.1 i 3.2.

4. Wydaje mi się, że korekta tekstu przed wydrukowaniem była zbyt pośpieszna. W ten sposób np. tytuł nie w pełni odpowiada treści pracy, gdyż jest w nim mowa o "wybranych podklasach klasy Selberga", podczas gdy praca dotyczy tylko jednej takiej podklasy, mianowicie rodziny S^{Γ}. Ponadto w pracy znalazło się trochę literówek (np. "laqualle" na str. XI, "Rimannische" na str.XII, "Weierstaßa" na str.3, czy "Schwartza" na str. 5), także w tekście matematycznym. I tak np. w dowodzie lematu 1.28 zamiast "dla $\sigma > 1$" winno być "dla $\sigma \geq 1 + 2\varepsilon$; w wyniku tego wzór w wierszu 15_3 traci sens, bo ε przy symbolu Winogradowa nie pojawia się po żadnej ze stron tego wzoru. Zdanie w wierszu 23_{10} sugeruje, że wzór (2.14) wynika z wzoru (2.15), a jest przecież naodwrót, a w wierszu 31^8 zamiast $\mu_F := \mu_E$ powinno być oczywiście $\mu_E := \mu_F$.

Te zupełnie drobne uwagi krytyczne nie mają wpływu na moją pozytywną ocenę rozprawy.

Uważam, że przedstawiona rozprawa spełnia wszelkie wymagania stawiane rozprawom doktorskim przez art.13 ust.1 Ustawy, gdyż zawiera poprawne pełne dowody nowych, oryginalnych i interesujących twierdzeń w trudnym dziale matematyki.

Uważam, że ta rozprawa uzasadnia nadanie Karolowi Gierszewskiemu stopnia doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki i wnoszę o dopuszczenie go do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

W. Narkiewicz