Prof. dr hab. Wojciech Kryszewski
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika

Toruń, 10 czerwca 2018 r.

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Adama Nawrockiego pt.
„O pewnych uogólnieniach funkcji prawie okresowych
i ich zastosowaniach"**

Przedstawiona rozprawa doktorska pana mgr. Adama Nawrockiego została wykonana na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza w Poznaniu. Jej promotorem był dr hab. Dariusz Bugajewski, prof. UAM. Rozprawa liczy 93 strony; składa się ze strony tytułowej, dedykacji, spisu treści, wstępu, sześciu rozdziałów, spisu literatury i skorowidza symboli i nazw.

W pierwszej części recenzji omówię problematykę rozprawy; w części drugiej przedstawię uwagi dotyczące kwestii redakcyjnych i merytorycznych, zaś w podsumowaniu sformułuję ostateczną konkluzję.

Część pierwsza (zawartość rozprawy): Zawartość przedstawionej rozprawy dobrze odzwierciedla bardzo obszerny Wstęp, w którym autor omawia szczegółowo problematykę, zakres tematyczny i strukturę rozprawy, jej kontekst w literaturze i otrzymane rezultaty. Wstęp jest napisany dojrzale i stanowi pomoc dla czytelnika.

Pierwszy rozdział ma charakter preliminaryjny, lecz i tu pojawiają się pewne dowodzone wyniki. Autor rozprawy podaje podstawowe pojęcia i oznaczenia, przypomina pewne fakty, a także klasyczne definicje funkcji prawie okresowych w sensie Bohra, granicznie okresowych, prawie automorficznych w sensie Bochnera, prawie okresowe w sensie Stiepanowa, Weyla i Besicovitcha oraz opisuje ich podstawowe własności i równoważne definicje. Pojawia się tu też dyskusja (pewnej szczególnej „torusowej" wersji, chyba pochodzącej od Hardy'eg i Littlewooda) słynnego twierdzenia Kroneckera o aproksymacjach diofantycznych, które pełni dość istotną rolę w konstrukcjach przykładów. Następnie podaje określenia ważnych z punktu widzenia rozprawy klas funkcji prawie okresowych względem miary Lebesgue'a, wprowadzonych przez Stiepanowa, a zbadanych dość szczegółowo przez Stoińskiego. Funkcje prawie okresowe względem miary są też nazywane mierzalnie prawie okresowymi (to, że podane definicje 1.17 i 1.18 są równoważne nie zostało jasno wyjaśnione). Pojawiają się tu dwa godne odnotowania lematy 1.9 i 1.10. Ten drugi lemat pełni w dalszym ciągu ważną rolę dla różnych przykładów. Podobną rolę odgrywa twierdzenie 1.11 wraz z wnioskiem 1.1 i przykładem 1.1 orzekającymi, że funkcja $1/w$, gdzie w jest uogólnionym wielomianem trygonometrycznym jest mierzalnie prawie okresowa. W kolejnym punkcie autor omawia funkcje prawie okresowe w sensie Lewitana, który wprowadził to pojęcie w kontekście ciągłości, nazywając je N-prawie okresowością, bazując na aproksymacjach diofantycznych i nawiązując do wspomnianego wyżej twierdzenia Kroneckera. Tu również mamy niebanalny lemat 1.12 pozwalający na ciekawe konstrukcje.

Rozdział drugi poświęcony jest badaniu relacji pomiędzy wprowadzonymi klasami funkcji prawie okresowych; te związki są znane, lecz autor przedstawia nietrywialne przykłady pokazujące różnice pomiędzy klasami funkcji mierzalnie prawie okresowych i funkcji prawie okresowych w sensie Lewitana. W przykładzie 2.1 wskazano prawie okresową w sensie Lewitana funkcję jednostajnie ciągłą i ograniczoną, która nie jest mierzalnie prawie okresowa (tym samym) rozstrzygając pewien otwarty problem, zaś przykład 2.2 pokazuje ciągłą i ograniczoną funkcję mierzalnie prawie okresową, która nie jest prawie okresowa w sensie Lewitana.

Dość obszerny rozdział trzeci dotyczy niezmienniczości operatora splotu z funkcjami całkowalnymi na rozważanych klasach funkcji prawie okresowych. Kwestia ta ma kluczowe znaczenie z punktu widzenia dalszych zastosowań w równaniach różniczkowych. Autor przypomina ten fakt w odniesieniu do klas funkcji prawie okresowych w sensie Bohra i Stiepanowa (twierdzenia 3.1 i 3.2) i pokazuje w przykładzie 3.3, że może to nie mieć miejsca w przypadku funkcji mierzalnie prawie okresowych. Rezultat jest jednak pozytywny, gdy dotyczy splotu funkcji mierzalnie prawie okresowej f z pewną specjalną funkcją g_λ (zdefiniowaną na stronie 33), o ile f spełnia dodatkowy warunek (3.1). Odpowiednio dobrane przykłady wskazują, że warunek ten jest realistyczny, a teza twierdzenia orzeka, że $f \star g_\lambda$ jest nawet funkcją prawie okresowa w sensie Bohra. Okazuje się jednak, że istnieją mierzalnie prawie okresowe funkcje lokalnie całkowalne f (p. przykład 3.4 lub 3.5) oraz twierdzenie 3.5), dla których splot $f \star g_\lambda$ może w ogóle nie istnieć lub nie jest funkcją mierzalnie prawie okresową. Sytuacja jest prostsza w przypadku funkcji prawie okresowych w sensie Lewitana; mówi o tym ogólne twierdzenia 3.6 3.7, a także twierdzenie 3.8 podające warunki dostateczne na to, aby splot $f \star g_\lambda$, gdzie f jest funkcją prawie okresową w sensie Lewitana, należał do tej klasy. Przykłady funkcji spełniających ten warunek są podane. Autor analizuje też sytuację, w której splot nie jest funkcją Lewitana. Za wysoce nietrywialne uznaję wyniki podrozdziału 3.3, w którym autor analizuje zachowanie asymptotyczne pewnych odwrotności uogólnionych wielomianów trygonometrycznych, co implikuje istnienie splotu z funkcją g_λ. Dowody odnośnego twierdzenia 3.10, a także mającego negatywna wymowę twierdzenia 3.11 oparte są o rozumowania w duchu twierdzenia Liouville'a dla ułamków łańcuchowych.

Rozdział czwarty rozprawy dotyczy istnienia w klasie funkcji prawie okresowych rozwiązań $y(\cdot)$ równania różniczkowego postaci $y' = \lambda y + f$, gdzie $\lambda < 0$, a f jest funkcją prawie okresową (w odpowiednim sensie). Łatwo dostrzec przez uzmiennianie stałej, że ogół rozwiązań ma postać $y(x) = ce^{\lambda x} + f \star g_\lambda(x)$, gdzie $c = y(0) - \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-\lambda t}\,dt$. Widać, że wśród ogółu rozwiązań jest tylko jedno, które ma szansę na „przeżycie" w klasie funkcji prawie okresowych (mianowicie takie, że $y(0) = \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-\lambda t}\,dt$ (o ile to ostatnie wyrażenie ma sens), a zatem wtedy, gdy $y = f \star g_\lambda$; fakt ten precyzuje lemat 4.1, a uzyskana postać uzasadnia wysiłki z poprzedniego rozdziału. Tym samym dyskusje dotyczące istnienia splotu mają swoje natychmiastowe odniesienie co do istnienia prawie okresowych (mierzalnie lub w sensie Lewitana) rozwiązań. Mówią o tym twierdzenia 4.1 - 4.4. Podane przykłady pokazują, że można skonstruować funkcję prawie okresową względem miary i w sensie Lewitana prawie okresową, dla której nie istnieje splot $f \star g_\lambda$, lecz istnieje rozwiązanie prawie okresowe w sensie Bohra. Sytuacja, gdy f jest lokalnie całkowalną i mierzalnie (lub w sensie Lewitana) prawie okresową funkcją została syntetycznie przedstawiona w twierdzeniach 4.5 i 4.6. W pozostałych rezultatach tego rozdziału zbadano przypadek, gdy f jest odwrotnością uogólnionego wielomiany trygonometrycznego.

W rozdziale piątym autor rozstrzyga pytanie o istnienia wartości średniej $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$ dla prawie okresowej funkcji f. W serii dobrze dobranych przykładów (przykłady 5.1, 5.2) pokazano, że sprawa istnienia wartości średniej w przypadku lokalnie całkowalnych funkcji mierzalnie prawie okresowych jest dość złożona. W twierdzeniu 5.1 podano kryterium istnienia wartości średniej.

Ostatni rozdział poświęcony został dyskusji równania różniczkowego postaci j.w., tzn. $y' = -\sigma y + f$, które modeluje zachowanie sieci neuronów pobudzane wejściem, tj. lokalnie całkowalną funkcją f, zaś $\sigma \geqslant 0$, o ile rozważać rozwiązania spełniające pewien implusowy ze względu na stan warunek brzegowy: jeśli $y(s) = 1$ dla pewnego $s \in \mathbb{R}$, to $\lim_{t\to s^+} y(t) = 0$. Model ten nosi w literaturze nazwę „leaky integrate-and-fire" (LIF). W pierwszym podrozdziale zebrano szereg wyników dotyczących własności odwzorowania „odpalenia" (*firing map*) Φ, które $x \in \mathbb{R}$ przyporządkowuje moment czasowy, w którym rozwiązanie startujące w czasie x z zera osiągnie krytyczną wartość 1, czyli jest to moment „odpalenia" impulsu. Widać, że nie każde wejście f gwarantuje, ze funkcja Φ jest zawsze poprawnie określona. W twierdzeniu 6.1 podano za pracą [38] warunek (6.3) dostateczny i konieczny na to, by odwzorowanie Φ było wszędzie zdefiniowane, zaś we wniosku 6.1 ciekawy fakt mówiący, że Φ jest odwzorowaniem określonym na $\mathbb{R}$, o ile wartość wejścia f istnieje i jest liczbą większą niż σ. Dalsze rozważania dotyczą tzw. odwzorowania *displacement* (czyli przemieszczenia) $\Psi(x) = \Phi(x) - x$ mierzącego czas potrzebny na „odpalenie". Twierdzenie 6.2 opisuje sytuację, w której Ψ (i, oczywiście, Φ) są odwzorowaniami jednostajnie ciągłymi.

Kolejny podrozdział dotyczy własności odwzorowań Φ i Ψ w sytuacji, gdy wejście f jest funkcją prawie okresową. Rozważania rozpoczyna twierdzenie 6.4, w którym scharakteryzowano warunki istnienia (wszędzie) odwzorowania Φ, gdy f jest mierzalnie prawie okresową funkcją. Kolejne wyniki dotyczą warunków zapewniających prawie okresowość odwzorowania Ψ. Podano tu twierdzenia 6.6 i 6.7 o prawie okresowości granicznej i w sensie Bohra odwzorowania Ψ, przy założeniu, że wejście f jest funkcją granicznie okresową lub prawie okresową w sensie Stiepanowa. Z tym ostatnim faktem ładnie koresponduje twierdzenie 6.8 dotyczące ciągłości przekształcenia, które prawie okresowym w sensie Stiepanowa funkcjom (spełniającym określony warunek) przyporządkowuje prawie okresowe w sensie Bohra odwzorowania przemieszczenia. Dalej pokazano kilka przykładów sytuacji, w których odwzorowanie przemieszczenia Ψ nie jest mierzalnie prawie okresowe mimo tej własności dla funkcji wejścia, oraz sytuacji w której to odwzorowanie jest (nawet) prawie okresowe w sensie Stiepanowa dla mierzalnie prawie okresowej lecz nie w sensie Stiepanowa funkcji wejścia.

Ostatni podrozdział poświęcony jest badaniu tzw. „firing rate" $Fr(x)$ w punkcie x (a więc współczynnika częstości „odpaleń" w x). Punktem wyjścia jest tu twierdzenie, w którym stwierdza się, że gdy $\sigma = 0$, to $Fr(x)$ jest równa wartości uśrednienia wejścia f (o ile średnia dla f istnieje). W twierdzeniu 6.10 (a także we wniosku 6.3 i twierdzeniu 6.11) autor pokazuje, że jest także na odwrót: istnienie $Fr(x)$ dla pewnego x, gwarantuje istnienie wartości średniej równej $Fr(x)$. Zasadniczym jednak wynikiem jest tu twierdzenie 6.13 (i przykład 6.4), w którym autor pokazuje, że gdy wejście f jest funkcja prawie okresową w sensie Stiepanowa prawie wszędzie istotnie większą od σ, to $Fr(x)$ istnieje i nie zależy od $x \in \mathbb{R}$.

Część druga (ocena merytoryczna): Jestem zdania, że przedstawiona praca doktorska mgr. Adama Nawrockiego stanowi doskonały przykład bardzo solidnego rzemiosła matematycznego. Świadczy o tym sam zamysł pracy, jej koncepcja, a w końcu realizacja i konstrukcja. Autor podjął się zadania wszechstronnego zbadania dwóch klas funkcji prawie okresowych: mierzalnie prawie okresowych oraz prawie okresowych w sensie Lewitana; nie stroni także od nowych obserwacji dotyczących innych, bardziej klasycznych klas takich funkcji. Z tak postawionym problemem nie był osamotniony: wielu autorów takie badania prowadziło w odniesieniu do innych, lepiej znanych klas funkcji prawie okresowych (por. wiele pozycji literaturowych). Powstały więc metody i techniki (choćby techniki pozwalające na zastosowania aproksymacji diofantycznych Lewitana) i teorio-miarowe (topologia gęstości itp). Wyniki Adama Nawrockiego polegają w głównej mierze na twórczym rozwinięciu tych metod i zastosowaniu własnych pomysłów i nowych chwytów dowodowych. Jednak nie tylko to, moim zdaniem, świadczy o wysokiej jakości jego pracy. Imponuje przede wszystkim dociekliwość i staranność badawcza autora. Praca jest aż „gęsta" od pytań i odpowiedzi na nie, przykładów i kontrprzykładów, dogłębnej analizy założeń i ich konsekwencji. Autor jest rzeczywiście matematykiem o dużej wrażliwości na szczegóły, bardzo dokładnym i starannym. Imponuje jego cierpliwość i kreatywność w tworzeniu niekiedy bardzo pomysłowych i nietrywialnych przykładów, sprawność rachunkowa. Z tego punktu widzenia można uznać, ze rozprawa p. Nawrockiego stanowi w istocie monograficzne opracowanie ww. zagadnienia. Część rozważań zaprojektowano tak, aby je wykorzystać w ostatniej części pracy dotyczącej istnienia i jakościowego zachowania rozwiązań impulsowego zagadnienia różniczkowego o impulsach zależnych od stanu modelującego zachowanie sieci neuronowych o wejściach prawie okresowych, a także pewnych funkcji charakteryzujących ten model, tzn. odwzorowań „odpalenia" i przemieszczenia. Także tu mamy do czynienia z bardzo dobrze i starannie zorganizowaną „akcją badawczą". Przedstawione kwestie autor bada z iście benedyktyńską cierpliwością i starannością. W zasadzie pozostaje po nim „spalona ziemia". Z jednym wyjątkiem: autor milczeniem pomija model LIF dla wejścia będącego funkcją prawie okresową w sensie Lewitana.

Autor rozprawy niezbicie wykazał się matematyczną dojrzałością, sprawnością i samodzielnością. Poza dużą liczbą wyników drobnych, niemniej jednak nietrywialnych i głębokich, rozprawa Adama Nawrockiego zawiera szereg wyników o sporym znaczeniu dla poruszanej problematyki. Część z nich stanowią zręczne konstrukcje, dzięki którym możliwe jest tworzenie interesujących przykładów i kontrprzykładów (np. lematy 1.10 i 1.11) ilustrujących teorię, a część twierdzenia: np. twierdzenia 3.4 i 3.8 o splocie, twierdzenia 3.10 i 3.11 o asymptotycznym zachowaniu odwrotności pewnego wielomianu trygonometrycznego, twierdzenie 5.1 o istnieniu wartości średniej, a także kilka twierdzeń (w tym twierdzenie 6.13) o własnościach odwzorowań „odpaleń" i przemieszczeń.

Moje pewne zastrzeżenia o charakterze merytorycznym dotyczą dwóch kwestii. Pierwsza polega na nie dość jasno przedstawionych motywacjach (poza akademickimi) podjęcia badań. Funkcje prawie okresowe pojawiły się w matematyce z określonych powodów. Na przykład, o ile mi wiadomo, zainteresowanie Bohra funkcjami prawie okresowymi wzięły się z rozważaniem sum skończonych szeregów Dirichleta lub uogólnionych wielomianów trygonometrycznych o niewspółmiernych częstotliwościach i ich niemal jednostajnych granic (albo domknięć ze względu na różne normy). Zresztą część przykładów w rozprawie również takiej sytuacji dotyczy. Generalnie mówiąc prawie okresowość jest cechą układów dynamicznych takich np. jak układ planet poruszających się po orbitach o niewspółmiernych okresach, a jednak konfiguracja planet jest „prawie okresowa".

Drugie z zastrzeżeń ma podobną naturę. Czy wyniki otrzymane w odniesieniu do badanego modelu mają jakąkolwiek interpretację dla modelowanego zjawiska? Model LIF jest szczególnie mocno osadzony w zastosowaniach i, jak sadzę, wyniki dotyczące istnienia rozwiązań prawie okresowych powinny mieć interpretację.

Praca doktorska p. Adama Nawrockiego zredagowana jest bardzo starannie, z należytą dbałością o kwestie formalne i estetykę czytelnika. Nie dostrzegłem praktycznie żadnych usterek literowych, co jest raczej rzadko spotykane w pracach tej wielkości. Autor prowadzi czytelnika dość pewną ręką, dobra rolę pełnią krótkie komentarze przed przykładami lub twierdzeniami. Mam jednak kilka drobnych zastrzeżeń dotyczących strony redakcyjnej. Razi mnie na przykład „piętrowe" konstruowanie definicji: np. mamy dwie (równoważne) definicje 1.8 i 1.11 lub 1.17 i 1.18 funkcji prawie okresowych w sensie Bochnera lub w sensie miary; razi stosowanie osobnej numeracji definicji, lematów, przykładów i twierdzeń: na paru stronach mamy wzór o numerze 6.1, definicję 6.1, Uwagę 6.1, przykład 6.1, twierdzenie 6.1 i wniosek 6.1 - ten zabieg utrudnia lekturę i niepotrzebnie irytuje czytelnika. Jest to tym bardziej męczące, że dotyczy pracy skomplikowanej technicznie i wymagającej dużej uwagi, którą łatwo rozproszyć podczas żmudnego poszukiwania numerowanych fragmentów. Nie bardzo podobał mi się sposób cytowania: podanie tylko numeru pozycji w bibliografii nie jest dostateczne, szczególnie gdy dotyczy to książki – przydałoby się podanie dokładniejszych „współrzędnych”. Generalnie jednak wymienione zastrzeżenia nie wpływają na wysoką ocenę pracy

Podsumowanie. Biorąc pod uwagę powyżej sformułowane pozytywne oceny i komentarze stwierdzam, że – moim zdaniem – przedstawiona rozprawa doktorska p. mgr. Adama Nawrockiego spełnia ustawowo i zwyczajowo wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Wojciech Kryszewski