Prof. dr hab. Michał Morayne
Instytut Matematyki i Informatyki
Politechnika Wrocławska
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 Wrocław

Wrocław, 17 kwietnia, 2014 r.

OPINIA O ROZPRAWIE DOKTORSKIEJ

Properties of random coverings of graphs

MGR. MARCINA WITKOWSKIEGO

STRUKTURA ROZPRAWY

Rozprawa doktorska p. mgra Marcina Witkowskiego, napisana pod kierunkiem prof. dra hab. Tomasza Łuczaka, składa się z pięciu rozdziałów, z których dwa pierwsze poświęcone są omówieniu rozważanych w pracy zagadnień, wprowadzeniu części niezbędnych definicji i przypomnieniu klasycznych narzędzi matematycznych wykorzystywanych w dalszym ciągu pracy, a następne trzy zawierają nowe wyniki. Wyniki tych rozdziałów są treścią trzech artykułów, z których jeden jest samodzielny i już opublikowany (w Electronic Journal of Combinatorics), a dwa są współautorskie (z T. Łuczakiem i Ł. Witkowskim i nie są jeszcze opublikowane - status jednego podany jest w bibliografii jako „submitted", a drugiego jako „informal publication").

Przedstawiona rozprawa jest korektą pierwszej wersji. O korektę prosiłem w poprzedniej, wstępnej opinii.

TEMATYKA ROZPRAWY

Rozprawa doktorska mgra Witkowskiego poświęcona jest badaniu własności podniesień losowych grafów. Podniesieniem grafu G, nazywamy dowolny graf $\tilde{G}$, dla którego istnieje homomorfizm $\psi : \tilde{G} \to G$, którego obcięcie do każdego zbioru złożonego z dowolnego wierzchołka z $\tilde{G}$ oraz jego sąsiadów jest odwzorowaniem 1-1. W tak zdefiniowanych podniesieniach, o ile G jest grafem spójnym, przeciwobrazy przez homomorfizm ψ każdego wierzchołka z G mają tę samą moc. Dla ustalonej mocy n takich przeciwobrazów Autor podaje naturalny sposób losowego wybierania podniesienia. W rozprawie rozważa się asymptotyczne zachowania losowych podniesień przy $n \to \infty$, w zależności od własności wyjściowego grafu G.

Tematyka losowych podniesień grafu i stawiane w niej problemy są bez wątpienia ciekawe, a Autor podaje dodatkową, ważniejszą, motywację do zajmowania się tą tematyką, mianowicie podniesienia losowe stanowiły narzędzie w rozwiązaniu problemów z innych działów teorii grafów. Tematyka ta podejmowana jest aktualnie przez wielu autorów.

OMÓWIENIE WYNIKÓW ROZPRAWY

Za główne wyniki rozprawy uważam twierdzenie 6 (rozdział 3), twierdzenie 18 (rozdział 4) oraz twierdzenie 22 (rozdział 5). Wyniki te omawiam szczegółowo poniżej.

Twierdzenie 6 (rozdział 3) orzeka, że asymptotycznie podniesienie spójnego grafu prostego o minimalnym stopniu wierzchołka $\delta \geq 3$ jest δ-spójne. Zatem twierdzenie to mówi o tym, że własność spójności zostaje silnie wzmocniona w losowym podniesieniu. Głównym środkiem dowodowym jest klasyczne twierdzenia Mengera charakteryzujące grafy δ-spójne poprzez oszacowanie od dołu przez δ mocy $|N(X)|$ otoczenia $N(X)$ każdego podzbioru wierzchołków X o mocy nie większej niż połowa mocy całego grafu. Dowód podzielony jest na dwa przypadki: $|X| \leq \log\log n$ oraz $|X| > \log\log n$. W pierwszym przypadku istotnie korzysta się z udowodnionego w rozdziale 3 rozprawy lematu 4 mówiącego, że asymptotycznie krótkie cykle są od siebie znacznie oddalone w losowym podniesieniu grafu. Przez ograniczenie liczby cykli do najwyżej jednego w $X \cap N(X)$ pozwala to już łatwo na oszacowanie $|N(X)| \geq \delta$. Przypadek $|X| > \log\log n$ jest trudniejszy i wymaga już analizy probabilistycznej z zastosowaniem metody pierwszego momentu. Pomysłowo użyte jest podniensienie drzewa rozpinającego dla grafu G. Dowód mimo pewnych wad redakcyjnych (uwagi 2-7 w części recenzji *Szczegółowe uwagi krytyczne*) jest poprawny i czytelny.

Główny wynik rozdziału 4 - twierdzenie 18 ma podobny charakter do twierdzenia 6. Mianowicie, mówiąc nieformalnie, pokazuje, że podniesienie losowe grafu spójnego jest ,,bardzo spójne". Orzeka ono mianowicie, że asymptotycznie podniesienie spójnego grafu prostego G o maksymalnym stopniu wierzchołka w jądrze H grafu G równym Δ zawiera (asymptotycznie) topologiczny $\Delta + 1$-graf pełny. Dowód oparty jest na ważnym strukturalnym lemacie 5 mówiącym, że dla dowolnej stałej $C \in \mathbb{N}$ dla losowo wybranego zbioru U wierzchołków we włóknie ustalonego wierzchołka z wyjściowego grafu, $|U| = C$, wierzchołki z U (asymptotycznie) leżą daleko od siebie i daleko od jakiegokolwiek krótkiego cyklu. W dowodzie wybiera się wierzchołek $\mathbf{v}$ o stopniu Δ w H (może być tylko jeden taki wierzchołek) i pokazuje się, że właśnie losowo wybrane $\Delta + 1$ wierzchołków z podniesienia H we włóknie $\mathbf{v}$, tworzące zbiór U, będą wierzchołkami rozgałęzienia pewnego topologicznego $\Delta + 1$-grafu pełnego. Graf ten konstruuje się w podniesieniu H, budując parami rozłączne drzewiaste otoczenia wierzchołków z U, a następnie rozpatrując ich przecięcia z włóknem wyznaczonym przez $\mathbf{v}$. Odpowiednio rozszerzając tego typu otoczenia, udaje się zbudować drogi łączące wierzchołki z U, tak aby te drogi się nie przecinały. Używa się tu argumentów probabilistycznych, pokazując, że przeszkody, które dla takiej konstrukcji mogą się pojawić, mają asymptotycznie małe (tzn. dążące do zera) prawdopodobieństwo.

Dowód twierdzenia 18 zawiera na tyle nieprecyzyjne definicje użytych tam pojęć, tak wiele stwierdzeń bez uzasadnienia (uwagi 8-21, zwłaszcza uwagi 9, 14, 17, 21, w części recenzji *Szczegółowe uwagi krytyczne*), że trudno jest prześledzić szczegóły. Zwłaszcza te części dowodu, gdzie Autor odnosi się do ,,generowania" pewnych struktur i losowości tego generowania, są mało czytelne. Autor ma kłopoty z ustaleniem formalnego modelu probabilistycznego, w którym przeprowadza się szacowania kluczowych dla dowodu prawdopodobieństw, lub - w najlepszym wypadku - ze zrozumiałym sformułowaniem takiego modelu.

Główny wynik rozdziału 5 - twierdzenie 22 orzeka o (asymptotycznym) istnieniu cyklu Hamiltona w lifcie grafu o minimalnym stopniu wierzchołka 5 i posiadającego krawędziowo rozłączne dwa cykle Hamiltona nie tworzące łącznie grafu dwudzielnego. Dowód polega na konstrukcji ,,krok po kroku" coraz dłuższej drogi w podniesieniu grafu wyjściowego, tak aby ostatecznie przejść przez wszystkie wierzchołki i pełna droga zamknęła się w cykl (Hamiltona). Konstrukcja odbywa się wg złożonego algorytmu. I tu używa się argumentów probabilistycznych, pokazując, że przeszkody, które dla realizacji takiego algorytmu mogą się pojawić, mają asymptotycznie małe (tzn. dążące do zera) prawdopodobieństwo. Wśród użytych tu metod probabilistycznych są procesy gałązkowe. Dla modyfikacji konstruowanej w algorytmie drogi używa się tzw. operacji Posy zmieniającej kolejność wierzchołków w danej drodze przy istnieniu zewnętrznego połączenia końca drogi z jednym z jej wierzchołków. Cała konstrukcja jest bardzo pomysłowa i nietrywialna i - mimo wad redakcyjnych (uwagi 22-30 w części recenzji *Szczegółowe uwagi* *krytyczne*) - czytelna. Opiera się jednak w znacznej mierze na nieprawdziwym teorio-grafowym lemacie 23. Kontrprzykład podany jest w uwadze 34 w części recenzji *Szczegółowe uwagi krytyczne*.

OCENA ROZPRAWY

Stronę redakcyjną rozprawy oceniam jako bardzo słabą. Często pojęcia zmieniają znaczenie z linii do linii, w rozumowaniach brak precyzji, mnożą się błędy i nieścisloości. Definicje podstawowych pojęć są często nieprecyzyjne. Nierzadko czytelnik musi sam dochodzić do właściwego znaczenia pojęć i właściwej argumentacji (szczegółowe uwagi co do redakcji rozprawy znajdują się w ostatniej części recenzji *Szczegółowe uwagi krytyczne*). Redakcja rozprawy nie daje dobrego świadectwa o kulturze matematycznej Autora, tym bardziej, że jest to już druga, poprawiana, wersja rozprawy.

Wartość merytoryczną rozprawy znacząco obniża fakt, że główny wynik rozdziału 5 (twierdzenie 22), będący też - mym zdaniem - potencjalnie głównym wynikiem rozprawy, oparty jest na nieprawdziwym lemacie (lemat 23). Eliminuje to w tej chwili ten rozdział z rozprawy.

Rozdział 3 jest weryfikowalny i zawiera ważne, nietrywialne i z całą pewnością publikowalne twierdzenie.

Podstawowe dla dowodu twierdzenia 18, głównego wyniku rozdziału 4, rachunki wydają się być oparte na dobrych intuicjach. Jednak dowód byłem w stanie prześledzić jedynie w zarysie, ponieważ nieprecyzyjna redakcja bardzo utrudnia sprawdzanie szczegółów i sprawia, że trudno uznać dowód za kompletny.

Podsumowując: w rozprawie z jednej strony widzę błędy oraz brak precyzji niedopuszczalny w tekstach matematycznych, z drugiej - rozprawa zawiera kilka weryfikowalnych nietrywialnych wyników (rozdział 3), a także jest nadzieja na wyjaśnienie wątpliwości co do innych rezultatów.

KONKLUZJA

Rozprawa zawiera zbyt mało materiału dającego się jednoznacznie ocenić jako poprawny. Mam jednak nadzieję, że w czasie egzaminu doktorskiego i obrony Doktorant będzie w stanie szczegółowo wyjaśnić luki i nieścisłości, co pozwoli zweryfikować pewne wyniki z rozprawy. Moje dalsze głosowania i rekomendacje dla Komisji i Rady Naukowej zależeć będą od odpowiedzi Doktoranta. Choć z dużymi wątpliwościami, wnoszę jednak o przejście do dalszych etapów przewodu doktorskiego.