Prof. dr hab. Michał Morayne
Instytut Matematyki i Informatyki
Politechnika Wrocławska
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 Wrocław

Wrocław, 17 kwietnia, 2014 r.

OPINIA O ROZPRAWIE DOKTORSKIEJ

Properties of random coverings of graphs

MGR. MARCINA WITKOWSKIEGO

STRUKTURA ROZPRAWY

Rozprawa doktorska p. mgra Marcina Witkowskiego, napisana pod kierunkiem prof. dra hab. Tomasza Łuczaka, składa się z pięciu rozdziałów, z których dwa pierwsze poświęcone są omówieniu rozważanych w pracy zagadnień, wprowadzeniu części niezbędnych definicji i przypomnieniu klasycznych narzędzi matematycznych wykorzystywanych w dalszym ciągu pracy, a następne trzy zawierają nowe wyniki. Wyniki tych rozdziałów są treścią trzech artykułów, z których jeden jest samodzielny i już opublikowany (w Electronic Journal of Combinatorics), a dwa są współautorskie (z T. Łuczakiem i Ł. Witkowskim i nie są jeszcze opublikowane - status jednego podany jest w bibliografii jako „submitted", a drugiego jako „informal publication").

Przedstawiona rozprawa jest korektą pierwszej wersji. O korektę prosiłem w poprzedniej, wstępnej opinii.

TEMATYKA ROZPRAWY

Rozprawa doktorska mgra Witkowskiego poświęcona jest badaniu własności podniesień losowych grafów. Podniesieniem grafu G, nazywamy dowolny graf $\tilde{G}$, dla którego istnieje homomorfizm $\psi : \tilde{G} \to G$, którego obcięcie do każdego zbioru złożonego z dowolnego wierzchołka z $\tilde{G}$ oraz jego sąsiadów jest odwzorowaniem 1-1. W tak zdefiniowanych podniesieniach, o ile G jest grafem spójnym, przeciwobrazy przez homomorfizm ψ każdego wierzchołka z G mają tę samą moc. Dla ustalonej mocy n takich przeciwobrazów Autor podaje naturalny sposób losowego wybierania podniesienia. W rozprawie rozważa się asymptotyczne zachowania losowych podniesień przy $n \to \infty$, w zależności od własności wyjściowego grafu G.

Tematyka losowych podniesień grafu i stawiane w niej problemy są bez wątpienia ciekawe, a Autor podaje dodatkową, ważniejszą, motywację do zajmowania się tą tematyką, mianowicie podniesienia losowe stanowiły narzędzie w rozwiązaniu problemów z innych działów teorii grafów. Tematyka ta podejmowana jest aktualnie przez wielu autorów.

OMÓWIENIE WYNIKÓW ROZPRAWY

Za główne wyniki rozprawy uważam twierdzenie 6 (rozdział 3), twierdzenie 18 (rozdział 4) oraz twierdzenie 22 (rozdział 5). Wyniki te omawiam szczegółowo poniżej.

Twierdzenie 6 (rozdział 3) orzeka, że asymptotycznie podniesienie spójnego grafu prostego o minimalnym stopniu wierzchołka $\delta \geq 3$ jest δ-spójne. Zatem twierdzenie to mówi o tym, że własność spójności zostaje silnie wzmocniona w losowym podniesieniu. Głównym środkiem dowodowym jest klasyczne twierdzenia Mengera charakteryzujące grafy δ-spójne poprzez oszacowanie od dołu przez δ mocy $|N(X)|$ otoczenia $N(X)$ każdego podzbioru wierzchołków X o mocy nie większej niż połowa mocy całego grafu. Dowód podzielony jest na dwa przypadki: $|X| \leq \log\log n$ oraz $|X| > \log\log n$. W pierwszym przypadku istotnie korzysta się z udowodnionego w rozdziale 3 rozprawy lematu 4 mówiącego, że asymptotycznie krótkie cykle są od siebie znacznie oddalone w losowym podniesieniu grafu. Przez ograniczenie liczby cykli do najwyżej jednego w $X \cap N(X)$ pozwala to już łatwo na oszacowanie $|N(X)| \geq \delta$. Przypadek $|X| > \log\log n$ jest trudniejszy i wymaga już analizy probabilistycznej z zastosowaniem metody pierwszego momentu. Pomysłowo użyte jest podniensienie drzewa rozpinającego dla grafu G. Dowód mimo pewnych wad redakcyjnych (uwagi 2-7 w części recenzji *Szczegółowe uwagi krytyczne*) jest poprawny i czytelny.

Główny wynik rozdziału 4 - twierdzenie 18 ma podobny charakter do twierdzenia 6. Mianowicie, mówiąc nieformalnie, pokazuje, że podniesienie losowe grafu spójnego jest „bardzo spójne". Orzeka ono mianowicie, że asymptotycznie podniesienie spójnego grafu prostego G o maksymalnym stopniu wierzchołka w jądrze H grafu G równym Δ zawiera (asymptotycznie) topologiczny $\Delta + 1$-graf pełny. Dowód oparty jest na ważnym strukturalnym lemacie 5 mówiącym, że dla dowolnej stałej $C \in \mathbb{N}$ dla losowo wybranego zbioru U wierzchołków we włóknie ustalonego wierzchołka z wyjściowego grafu, $|U| = C$, wierzchołki z U (asymptotycznie) leżą daleko od siebie i daleko od jakiegokolwiek krótkiego cyklu. W dowodzie wybiera się wierzchołek $\mathbf{v}$ o stopniu Δ w H (może być tylko jeden taki wierzchołek) i pokazuje się, że właśnie losowo wybrane $\Delta + 1$ wierzchołków z podniesienia H we włóknie $\mathbf{v}$, tworzące zbiór U, będą wierzchołkami rozgałęzienia pewnego topologicznego $\Delta + 1$-grafu pełnego. Graf ten konstruuje się w podniesieniu H, budując parami rozłączne drzewiaste otoczenia wierzchołków z U, a następnie rozpatrując ich przecięcia z włóknem wyznaczonym przez $\mathbf{v}$. Odpowiednio rozszerzając tego typu otoczenia, udaje się zbudować drogi łączące wierzchołki z U, tak aby te drogi się nie przecinały. Używa się tu argumentów probabilistycznych, pokazując, że przeszkody, które dla takiej konstrukcji mogą się pojawić, mają asymptotycznie małe (tzn. dążące do zera) prawdopodobieństwo.

Dowód twierdzenia 18 zawiera na tyle nieprecyzyjne definicje użytych tam pojęć, tak wiele stwierdzeń bez uzasadnienia (uwagi 8-21, zwłaszcza uwagi 9, 14, 17, 21, w części recenzji *Szczegółowe uwagi krytyczne*), że trudno jest prześledzić szczegóły. Zwłaszcza te części dowodu, gdzie Autor odnosi się do ,,generowania" pewnych struktur i losowości tego generowania, są mało czytelne. Autor ma kłopoty z ustaleniem formalnego modelu probabilistycznego, w którym przeprowadza się szacowania kluczowych dla dowodu prawdopodobieństw, lub - w najlepszym wypadku - ze zrozumiałym sformułowaniem takiego modelu.

Główny wynik rozdziału 5 - twierdzenie 22 orzeka o (asymptotycznym) istnieniu cyklu Hamiltona w lifcie grafu o minimalnym stopniu wierzchołka 5 i posiadającego krawędziowo rozłączne dwa cykle Hamiltona nie tworzące łącznie grafu dwudzielnego. Dowód polega na konstrukcji ,,krok po kroku" coraz dłuższej drogi w podniesieniu grafu wyjściowego, tak aby ostatecznie przejść przez wszystkie wierzchołki i pełna droga zamknęła się w cykl (Hamiltona). Konstrukcja odbywa się wg złożonego algorytmu. I tu używa się argumentów probabilistycznych, pokazując, że przeszkody, które dla realizacji takiego algorytmu mogą się pojawić, mają asymptotycznie małe (tzn. dążące do zera) prawdopodobieństwo. Wśród użytych tu metod probabilistycznych są procesy gałązkowe. Dla modyfikacji konstruowanej w algorytmie drogi używa się tzw. operacji Posy zmieniającej kolejność wierzchołków w danej drodze przy istnieniu zewnętrznego połączenia końca drogi z jednym z jej wierzchołków. Cała konstrukcja jest bardzo pomysłowa i nietrywialna i - mimo wad redakcyjnych (uwagi 22-30 w części recenzji *Szczegółowe uwagi* *krytyczne*) - czytelna. Opiera się jednak w znacznej mierze na nieprawdziwym teorio-grafowym lemacie 23. Kontrprzykład podany jest w uwadze 34 w części recenzji *Szczegółowe uwagi krytyczne*.

OCENA ROZPRAWY

Stronę redakcyjną rozprawy oceniam jako bardzo słabą. Często pojęcia zmieniają znaczenie z linii do linii, w rozumowaniach brak precyzji, mnożą się błędy i nieścisłości. Definicje podstawowych pojęć są często nieprecyzyjne. Nierzadko czytelnik musi sam dochodzić do właściwego znaczenia pojęć i właściwej argumentacji (szczegółowe uwagi co do redakcji rozprawy znajdują się w ostatniej części recenzji *Szczegółowe uwagi krytyczne*). Redakcja rozprawy nie daje dobrego świadectwa o kulturze matematycznej Autora, tym bardziej, że jest to już druga, poprawiana, wersja rozprawy.

Wartość merytoryczną rozprawy znacząco obniża fakt, że główny wynik rozdziału 5 (twierdzenie 22), będący też - mym zdaniem - potencjalnie głównym wynikiem rozprawy, oparty jest na nieprawdziwym lemacie (lemat 23). Eliminuje to w tej chwili ten rozdział z rozprawy.

Rozdział 3 jest weryfikowalny i zawiera ważne, nietrywialne i z całą pewnością publikowalne twierdzenie.

Podstawowe dla dowodu twierdzenia 18, głównego wyniku rozdziału 4, rachunki wydają się być oparte na dobrych intuicjach. Jednak dowód byłem w stanie prześledzić jedynie w zarysie, ponieważ nieprecyzyjna redakcja bardzo utrudnia sprawdzanie szczegółów i sprawia, że trudno uznać dowód za kompletny.

Podsumowując: w rozprawie z jednej strony widzę błędy oraz brak precyzji niedopuszczalny w tekstach matematycznych, z drugiej - rozprawa zawiera kilka weryfikowalnych nietrywialnych wyników (rozdział 3), a także jest nadzieja na wyjaśnienie wątpliwości co do innych rezultatów.

KONKLUZJA

Rozprawa zawiera zbyt mało materiału dającego się jednoznacznie ocenić jako poprawny. Mam jednak nadzieję, że w czasie egzaminu doktorskiego i obrony Doktorant będzie w stanie szczegółowo wyjaśnić luki i nieścisłości, co pozwoli zweryfikować pewne wyniki z rozprawy. Moje dalsze głosowania i rekomendacje dla Komisji i Rady Naukowej zależeć będą od odpowiedzi Doktoranta. Choć z dużymi wątpliwościami, wnoszę jednak o przejście do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

SZCZEGÓŁOWE UWAGI KRYTYCZNE

Wobec różnic w polskiej terminologii teorii grafów, na potrzeby tej recenzji *droga* (ang. *path*) oznacza graf, którego wierzchołki tworzą różnowartościowy ciąg, a krawędziami są pary sąsiednich wierzchołków w ciągu.

1. Niejasna jest definicja spaceru (*walk*) na stronie 5: ,,A *walk* is an alternating sequence of vertices and distinct edges...". Nie jest dla mnie jasne, co Autor ma na myśli, używając tu słowa ,,distinct". Na pewno nie chodzi tu o to, że wszystkie krawędzie są parami różne, bo później pojęcia spaceru używa się bez spełnienia tego warunku. Można wnioskować z konstrukcji zamkniętych spacerów w rozdziale 4, że kolejne nieskierowane krawędzie spaceru mają być różne, ale wtedy jest to odejście od klasycznej definicji (gdzie takiego warunku nie ma) i powinno to być precyzyjnie napisane.

2. Dowód lematu 4 jest poprawny, lecz kluczowa dla dowodu zmienna losowa Z' zdefiniowana jest niewłaściwie poprzez ,,counting the number of paths P of lenght at most $3(\log\log n)^2$ such that both ends of P are adjecent to some element of P". Pierwsza nieścisłość to oczywiście fakt, że koniec nietrywialnej drogi jest zawsze połączony z jej sąsiednim wierzchołkiem. Oczywiście nie to jest tu zasadniczą usterką, bo na pewno Autorowi chodzi o inne niż ten wierzchołki. Rzecz w tym, że koniec ścieżki P może być połączony krawędzią z więcej niż dwoma jej wierzchołkami, a to już uniemożliwia bezpośrednie szacowanie z góry przez Z' zmiennej Z. W rachunkach jednak Autor już tego błędu nie popełnia, bo zlicza ilość dróg P i wybranych na nich dowolnych dwóch punktów, a więc oblicza wartość oczekiwaną już dobrze dobranej, *innej* zmiennej losowej.

3. W dowodzie twierdzenia 6 Autor pisze: ,,Thus $|N(X)|$ equals to the number of all edges coming from X minus the edges that are inside X i.e. $\delta|X| - 2|X|$". Ogólnie nie jest prawdą w rozważanych przez Autora przypadkach, że $|N(X)| = \delta|X| - 2|X|$. Przypuszczam, że Autor chciał tu podać oszacowanie od dołu na $|N(X)|$.

4. W dowodzie twierdzenia 6 podział zbioru X na zbiory X_1, X_2 nie jest precyzyjnie zdefiniowany. Zbiory X_1, X_2 zdefiniowane jako: ,,X_1 that contains trees from $\tilde{T}$ which are entirely contained in X, X_2 containing (recenzent:!) trees from $\tilde{T}$ which intersect properly with X" nie są jednoznacznie określone. Dopiero z formuły na q można wnioskować, że X_1 jest sumą teoriomnogościową drzew składowych $\tilde{T}$ zawartych całkowicie w X, a X_2 jest

śladem wszystkich drzew z $\tilde{T}$, które kroją się właściwie z X.

5. W dowodzie twierdzenia 6 zdanie ,,Finally the set X can also contain up to $\delta - 1$ vertices that are not elements of previously chosen trees..." wydaje się nie mieć sensu, ponieważ wszystkie wierzchołki zbioru X są albo elementami drzew całkowicie zawartych w X, albo krojących się z X w sposób właściwy, bowiem całe podniesienie grafu G jako zbiór wierzchołków jest równy $\tilde{T}$.

6. W dowodzie twierdzenia 6 zdanie ,,Vertex v has $\delta - 1$ neighbours outside T" jest bardzo mylące i, w zasadzie, błędnie sformułowane, ponieważ wszystkie wierzchołki są elementami T. Powinno być raczej ,,Vertex v has $\delta - 1$ neighbours in G that are not its neighbours in T."

7. W dowodzie twierdzenia 6 oszacowanie na $B'(x_1, x_2)$ nie może zawierać z jako bytu ustalonego, ponieważ $z \leq \delta - 1$ jest jedynie parametrem. Wydaje się, że brakuje tu po prostu sumowania po $z = 0, \ldots, \delta - 1$. Zatem w kolejnych szacowaniach powinien pojawić się czynnik $\delta - 1$ lub po prostu δ, co niczego w dowodzie nie psuje, a jedynie zmienia wielkość stałej c.

8. W podrozdziale 4.1 w wierszu 29_{12} Autor pisze: ,,Since walks in $\mathbf{W}$ are closed, for every walk its lift is a path which starts at u_i [and] ends at some vertex $q \in \tilde{H}_v$." To zdanie jest nieprawdziwe. ,,Closed walk" (choć to pojęcie nie jest nigdzie w rozprawie zdefiniowane) musi zawierać cykl, a więc jego podniesienie nie może być drogą (path) .

9. W podrozdziale 4.2 (wiersz 30_2) Autor formułuje następujące zdanie: ,,... during our procedure we will generate the random lift $\tilde{G}$ on the way, i.e. if we visit a vertex from the lift we reveal its incident edges as a result of a random experiment by choosing one out of the possible edges". W innym miejscu Autor pisze: ,,...in each step of the branching through graph $\tilde{H}$ we are avoiding vertices visited in previous step". Zatem wydaje się, że po wygenerowaniu jednej krawędzi przyległej do danego wierzchołka nie mamy już szans wygenerować innych, bo do tego wierzchołka nie wracamy. Nie jest więc zrozumiałe, w jaki sposób otrzymujemy w tym procesie drzewa, które pojawiają się w dowodzie. Sformułowanie ,,our procedure" też nie jest jasne. Co gorsza, nie jest to jakaś zapowiedź podanego dalej ścisłego sformułowania, ale już fragment dowodu, do którego Autor wielokrotnie bezpośrednio lub pośrednio się odwołuje. Wydaje się, że formalnie poprawny model nie został nigdzie zdefiniowany, bo zdania, od zacytowania którego zaczyna się ta uwaga, za taką definicję przyjąć nie można.

10. W podrozdziale 4.2 (str. 30) powinno być (wiersz 30^{17}) ,,$\tilde{W}_j(u_i)$" zamiast ,,$\tilde{W}_j(u_1)$". Poza tym całe zdanie w tym wierszu brzmi: ,,Denote by $\tilde{W}_j(u_1)$ $[\tilde{W}_j(u_i)]$ the lift of a closed path $\mathbf{W}_j$ that starts at u_i." Jak wynika z definicji na str. 6, *closed path* oznacza po prostu cykl, ale z konstrukcji $\mathbf{W}_j$ wynika jasno, że nie jest to cykl. Całe zdanie nie ma zresztą sensu. Mianowicie istnieje tylko jedno podniesienie $\mathbf{W}_j$ (,,the lift of a closed path $\mathbf{W}_j$") i jego początek nie jest dobrze określony.

11. Podobnie w tym samym podrozdziale (i na tej samej stronie) w definicji $T_2(u_i)$ (wiersz 30_{14}) powinno być $T_1(u_j)$ zamiast $T_1(u_1)$.

12. W wierszu 31^6 podana jest następująca definicja $D_{W_k} = D_v \cap \{P \in \tilde{W}_k : |P \cap D| \geq 1\}$ jako definicja zbioru "the set of ends of those walks from $\tilde{W}_k$ which contains [contain] one inactive vertex". Oczywiście zapis $P \in \tilde{W}_k$ jest formalnie niepoprawny, jeśli przez $\tilde{W}_k$ rozumiemy graf będący podniesieniem $\mathbf{W}_k$. Zgodnie z komentarzem Autora $\tilde{W}_k$ oznacza teraz rodzinę spacerów zawartych (?) w podniesieniu $\mathbf{W}_k$. Przy tak zmienionej notacji formuła definiująca D_{W_k} powinna brzmieć: $D_{W_k} = D_v \cap \bigcup\{P \in \tilde{W}_k(: |P \cap D| \geq 1\}$. (Zresztą dwie linie dalej, w identycznym kontekście, P oznacza już nie spacer, a drogę).

13. W podrozdziale 4.2 Autor pisze: ,,For a single path the probability that the lift $\tilde{W}_j(u_i)$ of a walk $\mathbf{W}_j$ ends at a given vertex $z \in \tilde{H}_v$ equals $\frac{1}{n}$. But when we generate two different path $\tilde{W}_j(u_i)$ and $\tilde{W}_k(u_i)$, since those two paths can cross, this estimate is no longer true." Trudno odgadnąć, co Autor ma w drugim zdaniu na myśli.

14. Autor na początku zdania w wierszu 31^8 pisze ,,Notice that for every common point $\mathbf{a} \in \mathbf{W}_i \cap \mathbf{W}_j$ in the lifted graph,...". Autor rozróżnia w pracy oryginalny graf od podniesienia przez zaznaczanie oryginalnego grafu i jego wierzchołków pogrubioną czcionką, więc można odgadywać, że założenie $\mathbf{a} \in \mathbf{W}_i \cap \mathbf{W}_j$ dotyczy jednak oryginalnego grafu. Druga część tego zdania (po przecinku) ,,every path $P \in \tilde{W}_i$ intersects exactly one $P' \in \tilde{W}_j$" jest już całkowicie niejasna, ponieważ $\tilde{W}_i$ jest grafem, a nie rodziną dróg. Trudno też odgadnąć, jaki miałby być sens tego zdania, gdzie w założeniu $\mathbf{a}$ występuje pod kwantyfikatorem ogólnym, a w tezie już nie występuje. M. in. dlatego niezrozumiała jest dalsza część tego akapitu.

15. W wierszu 31_{10} Autor pisze: ,,Additionally, let us point out that the set $\hat{R}_l(u)$ has a structure of a tree...". W tym miejscu, a więc zanim zostały

zdefiniowane grafy M_{u_i}, ta uwaga nie ma sensu i całkowicie dezorientuje czytelnika.

16. Stwierdzenie w dowodzie twierdzenia 18 (podrozdział 4.3, str. 32) ,,for $q \leq 5 \log\log n$ and all the i's we can choose neighbourhoods $N_q(u_i)$ which form a tree and are disjoint from each other" jest niezrozumiałe. Otoczenia $N_q(u_i)$ są jednoznacznie zdefiniowane i nie ma tu nic do wybierania. Rozumiem, że Autorowi chodzi o to, że to właśnie te otoczenia będzie rozważał, ale wtedy zdanie, które opisuje taką sytuację, a nie dezorientuje czytelnika, powinno brzmieć na przykład: ,,for $q \leq 5 \log\log n$ and all the i's the neighbourhoods $N_q(u_i)$ form a tree and are disjoint from each other".

17. W dowodzie twierdzenia 18 Autor pisze (wiersz 32^9): ,,Note that in these neighbourhoods the distance between two vertices from the fiber $\tilde{H}_v$ is bounded by order of **G**". Nie widzę tu uzasadnienia. Istnieją przecież wartości q, dla których otoczenie $N_q(u_1)$ zawiera u_2, ale te wierzchołki są oddalone o co najmniej $11 \log\log n$, a więc o więcej niż o $|V(\mathbf{G})|$. Nawet jeśli to prawda (w co wątpię, bo dlaczego fenomen dla wierzchołków z U nie miałby tu zaistnieć dla innej pary wierzchołków?) przy aktualnych założeniach i nawet jeśli taki fakt jest łatwy do uzasadnienia, to uzasadnienie powinno się znaleźć w tekście rozprawy. Sądząc jednak z dalszego ciągu dowodu, być może chodzi tu jednak o inny fakt? Mianowicie o to, że dla dowolnego wierzchołka w $N_q(u_i)$ jest on odległy od pewnego wierzcholka z $\tilde{H}_v$ o nie więcej niż $|V(\mathbf{G})|$. Wobec tego, że $N_q(u_i)$ jest drzewem, powinno to wystarczać dla późniejszego oszacowania mocy $M(u_i)$ jako $\Theta(\log^4 n)$.

18. W dowodzie twierdzenia 18 Autor pisze (wiersz 32^{14}): ,,Two vertices x, y are connected in $M(u_i)$ if and only if they are the closest neighbours in the $N_q(u_i)$, i.e. there is no $z \in N_q(u_i)$ such that $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$''. Symbol $d(\cdot,\cdot)$ nie został nigdzie zdefiniowany. Zapewne chodzi o odległość $dist$ zdefiniowaną w wierszu 6^8. Warunek ten, z powodu założenia $z \in N_q(u_i)$ nie ma jednak sensu, bo oznaczałby po prostu, że x i y są sąsiadami w H, co nie może być prawdą. Zapewne zamiast ,,there is no $z \in N_q(u_i)$ such that $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$" powinno być ,,there is no $z \in M(u_i)$ such that $dist(x,y) = dist(x,z) + dist(z,y)$".

19. W dowodzie twierdzenia 18 Autor pisze (wiersz 32^{18}): ,,For each u_i we choose a subset of vertices $U_i = \{u_i^1, \ldots, u_i^{\Delta(H)}\} \in M(u_i)$." (oczywiście powinno być ,,$\subset$" zamiast ,,$\in$") Istotnie wydaje się, że przy założeniu $\delta(H) > 2$ taki zbiór można wybrać, niemniej na pewno w tym miejscu Autor powinien

to uzasadnić.

20. Dalej w dowodzie twierdzenia 18 Autor pisze (wiersz 32_9): „$\hat{R}_q(u_1^2)$ is equivalent to the set of leaves of the tree $M(u_1^2)$..." Pojęcie równoważności zbiorów (*equivalent*) nie zostało w pracy zdefiniowane. Domyślam się, że powinno być: *equal*.

21. W dowodzie twierdzenia 18 w szacowaniu (4.2) czynnik $2^{c \log^4 n}$ jest zapewne związany z oszacowaniem sumy współczynników dwumianowych, natomiast drugi czynnik wymaga - jak sądzę - argumentacji typu niezależności zdrarzeń, których prawdopodobieństwa są szacowane wzorem (4.1). Brak tu nie tylko jakiejkolwiek argumentacji, ale nawet komentarza.

22. Wciąż, mimo zwracanej w poprzedniej recenzji uwagi, nie jest jasna definicja *aktywnych* wierzchołków w dowodzie twierdzenia 22. Autor pisze (str. 40, początek podrozdziału 5.2): „First we generate the lift $\tilde{H}_1$, next at each point randomly, for a given vertex v, we choose its neighbours in $\tilde{G}_1$. [...] Whenever we have already generated an edge from $\tilde{G}_1$ adjecent to a vertex v we call such a vertex *inactive*, vertices that are not inactive are called *active*. We will denote the set of inactive vertices by D." Domyślam się, że jeśli dla wierzchołka v generujemy krawędzie prowadzące do jego sąsiadów, to, o ile tacy sąsiedzi nie są już wybrani w poprzednich krokach, to są uważani za aktywnych. Jednak tylko domyślam się, bo ze zdania „Whenever we have already generated an edge from $\tilde{G}_1$ adjecent to a vertex v we call such a vertex *inactive*" to wcale jasno nie wynika, ponieważ taka krawędź jest „adjecent" również do drugiego wyznaczającego ją wierzchołka.

23. W wierszu 42_5 Autor pisze: „Note that in any step in which we deactivate a vertex either it is already in P, or we have just added it to P. „We have just added it to P" oznacza też, że wierzchołek jest już w P, więc znaczenie tego zdania jest niejasne.

24. W analizie fazy 2 algorytmu z dowodu tw. 22 na stronie 43 Autor pisze (w wierszu 43^{13}): „Clearly, the probability that some of these vertices is [are] adjecent in $\tilde{G}_1$ to one of the basic cycles is bounded above by

$$1 - \left(\frac{n - n^{9/10}}{n}\right)^{n^{1/3}} \leq 1 - (1 - n^{-1/10})^{n^{1/3}} = 1 - o(1/\log n)."$$

Szacowanie prawdopodobieństwa z góry przez 1 jest bezwartościowe i, choć Autor czyni to z dużą konsekwencją, pisząc „bounded above" i powyższą nierówność ,,$\leq$" (w istocie będąca równością), chodzi tu o oszacowanie od dołu.

25. W opisie fazy 4 algorytmu Autor pisze "Continue to perform the operations until one of the following conditions holds:

- there is an edge connecting path $P \in \mathcal{P}_q(P, w_1)$ with some basic cicle $C'_{w'}$,... In the case one of the first two conditions is met go back to Phase 3...".

Połączenie drogi z cyklem może zachodzić przez połączenie pewnego wewnętrznego wierzchołka drogi z pewnym wierzchołkiem cyklu, tymczasem przejście do fazy 3 wymaga połączenie końca drogi P z jednym z podstawowych cykli. Ta rozbieżność znaczeń pojawiła się także w czasie recenzji pierwszej wersji rozprawy i otrzymałem tu wyjaśnienie Autora:

>>,,there is a connection between a path ... and ... cycle" w rozumieniu: istnieje krawędź łacząca obie struktury. <<
A więc nie ma tu przejścia do fazy 3. Domyślam się jedynie, że Autor po raz drugi błędnie nie zawęża tu pojęcia *połączenia*.

26. W analizie fazy 5 Autor pisze (wiersz 45^8): ,,Thus let us recall, we treat the process of applying consecutive Posa transformations as a branching process." To zdanie jest mylące. W istocie rozważamy tu proces zatrzymany regułą stopu wyznaczoną przez pojawienie się połączenia z dopełnieniem P. Mimo, że jest to powiedziane w opisie fazy 5 algorytmu przy określeniu warunków przejścia do fazy 3, to cały początkowy tekst w analizie fazy 5 od wiersza 44_{15} do wiersza 45^{11} jest mylący i bardzo opóźniający lekturę. Można na sytuację tu rozważaną patrzeć poprzez prawdopodobieństwo warunkowe, tzn. analizować, co się dzieje, jeśli nie nastąpi połączenie końca P' z dopełnieniem P. Szkoda, że Autor tego wyraźnie nie napisał. Zaoszczędziłby w ten sposób piszącemu tę recenzję i innym czytelnikom sporo czasu.

27. W opisie faz 5 i 6 algorytmu, a także w analizie tych faz, P' jest ,,połową" drogi P. Tymczasem na rysunku 5.1 mającym ilustrować operacje na drodze P droga P' występuje już jako wynik operacji Posy na P. Czytelnik, zamiast uzyskania pomocy w postaci dobrej ilustracji jest tu dezorientowany przez Autora.

28. W opisie fazy 6 algorytmu (wiersz 48^{16}) Autor pisze: ,,Now let us try to generate an edge from u to a vertex $b_1 \in \tilde{G}_{b_1}$. The probabilty that such a vertex exists and belongs to Q_1 equals $1/9k^2$." Nie widzę uzasadnienia dla tego stwierdzenia. Nasuwa się tu od razu pewien komentarz: połączony z u wierz-

chołek we włóknie zawsze istnieje, ponieważ u jest we włóknie wyznaczonym przez $\mathbf{z}$, a $\mathbf{z}$ i b_1 są połączone krawędzią, a zatem fragment zdania „The probabilty that such a vertex exists" jest tu mylący - wygląda na to, że Autor wylicza warunki, których spełnienie obarczone jest pewną losowością. Wracając zaś do zasadniczego tu pytania, nie widzę żadnego argumentu uzasadniającego fakt, że prawdopodobieństwo, że $\mathbf{b}_1$ znalazł się w Q_1, jest <u>równe</u> $1/9k^2$. Dla uzasadnienia dalszego ciągu rozumowania w dowodzie twierdzenia 22 wystarczy jednak stwierdzenie, że prawdopodobieństwo, o którym mowa, jest nie mniejsze od $1/9k^2$, a to już istotnie wynika z definicji segmentów Q_i.

29. W następnym zdaniu Autor pisze: „If b^1 is not a part of Q_1... Nie jest to zrozumiałe, bo usiłowaliśmy znaleźć wierzchołek b^1 z przekroju Q_1 i włókna wyznaczonego przez $\mathbf{b}_1$. Jeśli taki wierzchołek nie istnieje, to co oznacza teraz b^1? Być może, Autorowi chodzi tu o wybranie losowe wierzchołka z włókna wyznaczonego przez $\mathbf{b}_1$ i rozważenie dwóch alternatywnych sytuacji: albo jest on z Q_1, albo nie. Wtedy jednak Autor powinien to wyraźnie napisać.

30. Dalej w analizie fazy 6 algorytmu (w wierszu 48_8) Autor pisze: „Note that since the length of $\mathbf{H}_2\vec{\mathbf{H}}_1$ -alternating path is bounded by $2(k-1)$ during the process we have to generate at most $k-1$ edges (those which belongs [belong] to $\vec{\mathbf{H}}_2$)." Jak rozumiałem, od początku dowodu generujemy krawędzie z podniesienia grafu $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G} - \mathbf{H}_1$ (wiersz 39_1). Nie wiem, dlaczego teraz mielibyśmy generować wyłącznie (skierowane) krawędzie z grafu $\vec{\mathbf{H}}_2$? Swoją drogą, taki obiekt nie został nawet do tej pory zdefiniowany.

31. Nie jest jasne, o czym Autor mówi w dowodzie lematu 24. Jeśli wierzchołki uzyskują kolory wg. podanej przez Autora reguły („We mark vertices in H red if we leave this vertex by a red edge and respectively blue [if] we leave this vertex by a blue edge") w trakcie budowania pewnej $\mathbf{H}_2\vec{\mathbf{H}}_1$-alternującej drogi zaczynającej się w v, to argument podany w uwadze (3) (wiersze 50_{10-7}) jest niezrozumiały. Może się przecież zdarzyć, że y wystąpi na $\mathbf{H}_2\vec{\mathbf{H}}_1$-alternującej drodze prowadzącej od v do x i wtedy nie można już poprowadzić żadnego nowego fragmentu drogi od x do y, a więc nie pojawia się podana przez Autora sprzeczność.

32. W dowodzie lematu 24 Autor najpierw nadaje kolory wierzchołkom zależnie od tego jakiego koloru krawędzią opuszczamy dany wierzchołek (domyślam się, że w trakcie konstruowania alternujących $\mathbf{H}_2\vec{\mathbf{H}}_1$ dróg startujących z v). Następnie jednak Autor pisze: „Denote by N the set of vertices that

are not reached from vertex v by an $\mathbf{H}_2\vec{\mathbf{H}}_1$ alternating path (that did not get any color) ...". Takie wyjaśnienie w nawiasie sugeruje równoważność, ale kolorów nie otrzymują zgodnie z podaną definicją także te wierzchołki do których można dotrzeć, ale z których nie można wyjść.

33. W dowodzie lematu 24 Autor robi następują obserwację: „(i) There are no red edges $\{x, y\}$ from $x \in R \cup RB$ to $y \in N$, because that would imply $y \in B$." To uzasadnienie jest niezrozumiałe. Jeśli istniałaby czerwona krawędź łącząca wierzchołek z R lub z RB z wierzchołkiem $y \in N$, to, po prostu, do wierzchołka y można by dojść z v drogą alternującą typu $\mathbf{H}_2\vec{\mathbf{H}}_1$ i byłaby to sprzeczność z $y \in N$ i definicją N.

34. Uwaga 30 mówi o luce w dowodzie lematu 24. Jednak lemat 23 (a przez to i ogólniejszy lemat 24) jest fałszywy. Rozważmy dwa cykle 9-wierzchołkowe: skierowany $\vec{\mathbf{H}}_1 = \langle v_1v_2v_3 \dots v_9v_1 \rangle$ i nieskierowany $\mathbf{H}_2 = \langle v_1v_4v_7v_9v_6v_8v_2v_5v_3v_1 \rangle$. Niech $v = v_1$. Rozważmy wszystkie możliwe drogi alternujące typu $\mathbf{H}_2\vec{\mathbf{H}}_1$ zaczynające się w $v = v_1$. Pierwsze (niebieskie) połączenie możliwe jest z v_3 i z v_4. Zatem możliwe drogi długości 1 to $\langle v_1v_3 \rangle$ oraz $\langle v_1v_4 \rangle$. Drugie połączenie musi być czerwone i skierowane od v_3 lub v_4, więc możliwe drogi długości 2 to $\langle v_1v_3v_4 \rangle$ oraz $\langle v_1v_4v_5 \rangle$. Następne połączenie musi być niebieskie, a więc możliwe drogi długości 3 to $\langle v_1v_3v_4v_7 \rangle$, $\langle v_1v_4v_5v_3 \rangle$ oraz $\langle v_1v_4v_5v_2 \rangle$. Następne połączenie musi być czerwone o odpowiedniej orientacji, a więc możliwe drogi długości 4 to $\langle v_1v_3v_4v_7v_8 \rangle$ oraz $\langle v_1v_4v_5v_2v_3 \rangle$. Następne połączenie musi być niebieskie, a więc możliwe drogi długości 5 to $\langle v_1v_3v_4v_7v_8v_2 \rangle$ oraz $\langle v_1v_3v_4v_7v_8v_6 \rangle$. Następne połączenie musi być czerwone o odpowiedniej orientacji, a więc dla drogi długości $\langle v_1v_3v_4v_7v_8v_2 \rangle$ połączenie musiałoby być z v_3, a ten wierzchołek już jest w dotychczasowej drodze, a dla drogi $\langle v_1v_3v_4v_7v_8v_6 \rangle$ z v_7 i ten wierzchołek też jest już w dotychczasowej drodze. Zatem wypisaliśmy już wszystkie drogi alternujące typu $\mathbf{H}_2\vec{\mathbf{H}}_1$ zaczynające się w $v = v_1$. Jak widać nie udało się nam dojść do wierzchołka v_9.

Michał Morayne