Opinia o rozprawie doktorskiej
magistra Bartosza Staniowa
zatytułowanej

Operatory całkowe i multiplikatory między przestrzeniami funkcji holomorficznych na dysku.

Rozprawa doktorska magistra Bartosza Staniowa dotyczy badania własności wybranych przestrzeni funkcji holomorficznych w dysku jednostkowym oraz operatorów liniowych określonych na tych przestrzeniach. Chodzi tu głównie o przestrzenie Hardy'ego, Nikolskiego, Nevanlinny oraz Priwałowa. Recenzowana rozprawa składa się ze wstępu, trzech rozdziałów i bibliografii liczącej 69 pozycji.

Rozdział pierwszy (wstęp) zawiera podstawowe fakty potrzebne w dalszej części rozprawy. Znajdujemy tu między innymi definicje i podstawowe własności przestrzeni unormowanych, F-przestrzeni i przede wszystkim własności funkcji holomorficznych, podharmonicznych, harmonicznych oraz przestrzeni Hardy'ego, Nevanlinny, Smirnowa i Priwałowa potrzebne w dalszej części rozprawy. Ponadto podano w nim także pewne rezultaty dotyczące multiplikatorów i powłok solidnych. Orginalne rezultaty uzyskane przez doktoranta znajdują się w drugim, trzecim i czwartym rozdziale rozprawy.

Tematyka rozdziału drugiego dotyczy głównie problemu rozszerzenia dziedziny operatora Volterry $T_g : H^p \to H^p$ danego wzorem

$$T_g f(z) = \frac{1}{z} \int_0^z f(w)g'(w)dw$$

dla pewnych funkcji generujących g holomorficznych w dysku jednostkowym i opisu jego dziedziny optymalnej tzn. największej przestrzeni unormowanej $[T_g, H^p]$ takiej że operator $T_g : [T_g, H^p] \to H^p$ jest dobrze określony i ograniczony. Podstawowym rezultatem jest tu Tw. 2.3 podające kompletny opis przestrzeni $[T_g, H^p]$. Jest ono uogólnieniem rezultatu Curbery i Rickera (zob. [13] w bibliografii doktoratu) gdzie udowodniono analogiczny rezultat dla operatora Cesáro (W tym przypadku $(g(z) = -Log(1-z)$.) Następnie doktorant bada własności przestrzeni $[T_g, H^p]$. Dowodzi on między innymi że $H^p \subseteq [T_g, H^p]$, (zob. Stw. 2.3), charakteryzuje holomorficzne w dysku jednostkowym funkcje ϕ dla ktorych operator mnożenia $M_\phi(f) = \phi f$ jest dobrze zdefiniowny i ograniczony na $[T_g, H^p]$ (zob. Tw. 2.5) oraz stwierdza że $[T_g, H^p]$ jest przestrzenią ośrodkową i jednostajnie wypukłą dla $p \neq 1$.

W dalszej części rozdziału zastosowano powyżej opisane rezultaty do badania rozszerzeń dziedziny dla operatora Libery danego wzorem

$$Lf(z) = \frac{1}{z - z_o} \int_{z_o}^z f(w)dw,$$

gdzie f jest funkcją holomorficzną w otoczniu otwartym (zależnym od f) dysku jednostkowego. Udowodniono tu między innymi warunki na ograniczonosć operatora L działającego z wagowej przestrzeni Hardy'ego (zob. Wniosek 2.3), pokazano że operator Libery jest operatorem sprzężonym do operatora Cesáro $C : H^p \to H^p$, opisano maksymalną dziedzinę operatora Libery $[L, H^p]$ (zob. Stw. 2.5). Ponadto udowodniono że $[L, H^p] \subseteq [C, H^p]$, gdzie C jest operatorem Cesáro (zob. Tw. 2.8). Ostatnia cześć rozdziału drugiego dotyczy własności dyskretnego operatora Hardy'ego L na dodatniej powłoce solidnej przestrzeni H^p. Motywację do badań stanowiła tu praca Curbery i Rickera (zob. [16] w bibliografii doktoratu) dotycząca analogicznej problematyki w przypadku przestrzeni Cesáro. Najistotniejsze rezultaty tej części to Tw. 2.9 dotyczące ograniczoności operatora L na dodatniej powłoce solidnej przestrzeni H^p oraz Tw. 2.10 charakteryzujące spektrum operatora L w zależności od p.

W rozdziale trzecim badane są własności multiplikatorów funkcyjnych dla pewnych przestrzeni funkcji holomorficznych w dysku jednostkowym. Bezpośrednią motywacją do tych badań jest wynik Nikolskiego (zob. Tw. 3.1, str. 43), które podaje pewne własności przestrzeni multiplikatorów funkcyjnych między $\mathcal{F}l^p$ a $\mathcal{F}l^q$, gdzie

$$\mathcal{F}(l^p) = \{f \in H(\mathbb{D}) : \{\hat{f}(n)\} \in l^p\}.$$

Doktorant, zastępując przestrzeń l^p dowolną ciągową przestrzenią symetryczną E, definiuje przestrzeń

$$\mathcal{F}(E) = \{f \in H(\mathbb{D}) : \{\hat{f}(n)\} \in E\}.$$

i bada własności multiplikatorów między przestrzeniami $\mathcal{F}(E)$ i $\mathcal{F}(F)$, gdzie E i F są przestrzeniami symetrycznymi. Twierdzenie 3.2 uogólnia klasyczny rezultat Schura (zob. [55] w bibliografii doktoratu) opisujące przestrzeń $\mathcal{M}(l^2)$ multiplikatorów pomiędzy przestrzeniami $\mathcal{F}(l^2)$ na przypadek przestrzeni $\mathcal{F}(E)$, gdzie E jest dowolną ciągową przestrzenią symetryczną. Twierdzenie 3.3 mówi że $\mathcal{M}(E, F) = \mathcal{M}(F', E')$, gdzie symbol E' oznacza dual Koethego przestrzeni E. Ważne jest również Tw. 3.4 mówiące że przestrzeń $\mathcal{M}(E)$, zawiera izometryczną kopię przestrzeni l^1, dla dowolnej ciągowej przestrzeni symetrycznej E, a więc w szczególności nie jest refleksywna.

W pierwszej części rozdziału czwartego doktorant podaje opis powłoki solidnej dla przestrzeni Priwałowa (zob. Tw. 4.4). Rozwiązuje on w ten sposób problem postawiony przez M. Nawrockiego (zob. [45] w bibligrafii doktoratu). Idea dowodu Twierdzenia 4.4 bazuje na udowodnionym wcześniej Lemacie 4.2 oraz Tw. 4.3 z pracy [45].

Druga część rozdziału czwartego dotyczy badania własności abstrakcyjnych przestrzeni Nevanlinny, N_ϕ, które są uogólnieninami klasycznych przestrzeni Nenvanlinny, Smirnowa oraz Priwałowa. Główne rezultaty tej części to Tw. 4.7, w którym została udowodniona zupełność przestrzeni N_ϕ względem F-normy $\|\cdot\|_\phi^*$ (zob. str. 60 w doktoracie) oraz Tw. 4.8, mówiące że N_ϕ jest podzbiorem przestrzeni F_ϕ (zob. wzór 4.11, str. 63).

W kolejnym podrozdziale rozdziału czwartego udowodnione zostało twierdzenie faktoryzacyjne dla przestrzeni N_ϕ (zob. Tw. 4.10) o rozkładzie dowolnej funkcji $f \in N_\phi \setminus \{0\}$ na iloczyn funkcji zewnętrzej i wewnętrznej. Interesującymi konsekwencjami tego rezultatu są Twierdzenia 4.11, 4.15 i 4.16 charakteryzujące algebraiczne własności pierścienia N_ϕ. Ponadto w Tw. 4.17 podano warunek konieczny na to aby ciąg $\{\lambda_k\}$ był multiplikatorem z przestrzeni abstrakcyjnej przestrzeni Nevanlinny N_ϕ do przestrzeni Hardy'ego H^p. Twierdzeni 2.19 pokazuje że przy pewnym dodatkowym założeniu na funkcję ϕ jest to również warunek wystarczający.

W ostatnim podrozdziale rozdziału czwartego została opisana (przy pewnych dodatkowych założeniach na funkcję ϕ) przestrzeń dualna do N_ϕ (zob. Tw. 4.20 i Tw. 4.23).

Moim zdaniem, przedstawiona mi do oceny rozprawa doktorska prezentuje wysoki poziom merytoryczny i wnosi istotny wkład w teorię przestrzeni funkcji holomorficznych w dysku jednostkowym. Szczególnie chciałbym tu wyróżnić wyniki dotyczące maksymalnej dziedziny operatora Volterry i ich zastosowanie do badania operatora Libery, opis powłoki solidnej dla przestrzeni Priwałowa jak również wyniki dotyczące abstrakcyjnej przestrzeni Nevanlinny N_ϕ. Problemy których dotyczy rozprawa nie są sztucznie wymyślone i nawiązują do badań innych autorów m. in. Curbery i Rickera, Nikolskiego i Nawrockiego. Również doktorant wielokrotnie korzysta w swoich dowodach twierdzeń z wyników innych autorów, co świadczy o jego doskonałej znajomości tematyki. Chciałbym również wyróżnić stronę redakcyjną rozprawy. Jest to jeden z najlepiej zredagowanych doktoratów spośrod tych które recenzowałem, a byłem już recenzentem kilkunastu prac doktorskich.

Biorąc pod uwagę wyżej wymienione argumenty, z pełną odpowiedzialnością stwierdzam, że rozprawa doktorska magistra Bartosza Staniowa spełnia warunki ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki z dnia 14 marca 2003 roku.
Zatem wnioskuję o dopuszczenie magistra Bartosza Staniowa do dalszych etapów przewodu doktorskiego i o nadanie mu stopnia naukowego doktora nauk matematycznych. Wnioskuję również o wyróżnienie rozprawy, co jest uzasadnione w dołączonym do recenzji wniosku.

Kraków, dnia 31 maja 2017 roku

Prof. dr hab. Grzegorz Lewicki
Profesor zwyczajny w Instytucie Matematyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie

Grzegorz Lewicki