Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Matematyki i Informatyki

Wniosek o wszczęcie postępowania habilitacyjnego
na podstawie osiągnięcia naukowego zatytułowanego

Uogólnione i klasyczne przestrzenie Orlicza–Lorentza

Paweł Foralewski

Załącznik 2

Autoreferat

Poznań, luty 2013

Spis treści

1. Dyplomy i stopnie naukowe

1993	magister matematyki	Wydział Matematyki i Fizyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza Promotor: prof. dr hab. Henryk Hudzik Tytuł: *Punkty ekstremalne wybranych przestrzeni Banacha*
1994	magister teologii	Papieski Fakultet Teologiczny we Wrocławiu Promotor: ks. bp prof. dr hab. Ignacy Dec Tytuł: *Czesława Białobrzeskiego koncepcja przyczynowości*
1997	doktor nauk matematycznych w zakresie matematyki	Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza Promotor: prof. dr hab. Henryk Hudzik Tytuł: *O topologicznej i geometrycznej strukturze uogólnionych przestrzeni Calderona–Łozanowskiego*

2. Informacja o zatrudnieniu w jednostkach naukowych

1.10.1993–31.12.1997	studia doktoranckie Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza
od 15.01.1998	adiunkt Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza

3. Osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 16 ust. 2 ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.)

Powyższym osiągnięciem naukowym jest jednotematyczny cykl ośmiu artykułów zatytułowany *Uogólnione i klasyczne przestrzenie Orlicza–Lorentza*.

3.1. Lista publikacji wchodzących w skład osiągnięcia naukowego zatytułowanego *Uogólnione i klasyczne przestrzenie Orlicza–Lorentza*[1]

[H1] Paweł Foralewski, Henryk Hudzik, Lucjan Szymaszkiewicz, *On some geometric and topological properties of generalized Orlicz–Lorentz sequence spaces*, Mathematische Nachrichten **281** (2008), no. 2, 181–198.

[H2] Paweł Foralewski, Henryk Hudzik, Lucjan Szymaszkiewicz, *Local rotundity structure of generalized Orlicz–Lorentz sequence spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **68** (2008), no. 9, 2709–2718.

[H3] Paweł Foralewski, *Some fundamental geometric and topological properties of generalized Orlicz–Lorentz function spaces*, Mathematische Nachrichten **284** (2011), no. 8–9, 1003–1023.

[H4] Paweł Foralewski, *Rotundity structure of local nature for generalized Orlicz–Lorentz function spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **74** (2011), no. 12, 3912–3925.

[H5] Paweł Foralewski, *On some geometric properties of generalized Orlicz–Lorentz function spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **75** (2012), no. 17, 6217–6236.

[H6] Paweł Foralewski, Henryk Hudzik, Paweł Kolwicz, *Non-squareness properties of Orlicz–Lorentz sequence spaces*, Journal of Functional Analysis **264** (2013), no. 2, 605–629.

[H7] Paweł Foralewski, *On some geometric properties of generalized Orlicz–Lorentz sequence spaces*, Indagationes Mathematicae N. S. (2013), doi:10.1016/j.indag.2012.11.07.

[H8] Paweł Foralewski, Henryk Hudzik, Paweł Kolwicz, *Non-squareness properties of Orlicz–Lorentz function spaces*, Journal of Inequalities and Applications 2013, **2013**:32, doi:10.1186/1029-242X-2013-32, 25 stron.

3.2. Omówienie wyników zawartych w publikacjach wchodzących w skład osiągnięcia naukowego zatytułowanego *Uogólnione i klasyczne przestrzenie Orlicza–Lorentza*

Moje badania naukowe, w tym także rezultaty wchodzące w skład niniejszego osiągnięcia, dotyczą geometrii przestrzeni Banacha (patrz [28]), będącej działem analizy funkcjonalnej. Warto tutaj zauważyć, że istotnym czynnikiem wpływającym na ciągły rozwój badań własności geometrycznych w różnych klasach przestrzeni Banacha, jest możliwość wykorzystania otrzymanych wyników w innych gałęziach matematyki,

[1] Kolejność w jakiej wymieniono publikacje jest zgodna z kolejnością ich akceptacji przez czasopisma, co nie zawsze odpowiada kolejności uzyskania zawartych w nich wyników. Impact Factor czasopisma (z roku wydania atykułu i aktualny pięcioletni) oraz mój procentowy udział w wymienionych publikacjach zostały podane w Załączniku 3: *Wykaz opublikowanych prac naukowych.*

W niniejszym autoreferacie poza wymienioną listą prac, oznaczanych przy pomocy prefiksu H, znajdują się jeszcze dwa spisy publikacji. Mianowicie, na stronach Z2-27–Z2-28 wymienione są pozostałe moje prace, oznaczane przy użyciu prefiksu D, natomiast prace innych autorów cytowane w niniejszym opracowaniu można znaleźć w pozycji Literatura (ss. Z2-31–Z2-34).

między innymi w teoriach aproksymacji, punktu stałego czy uogólnionych operatorów odwrotnych.

Większość wyników wchodzących w skład wymienionych wyżej publikacji dotyczy nowych przestrzeni modularnych nazwanych uogólnionymi przestrzeniami Orlicza–Lorentza. Pierwszym problemem jaki należało rozwiązać było ustalenie warunków, jakie powinny spełniać funkcje Musielaka–Orlicza, by generowane przez nie uogólnione przestrzenie Orlicza–Lorentza były symetrycznymi przestrzeniami Banacha.[2] Po znalezieniu powyższych warunków podjęto badania własności topologicznych i geometrycznych. W przypadku niektórych z nich uzyskane rezultaty zastosowano do klasycznych przestrzeni Orlicza–Lorentza, poprawiając znane dotychczas wyniki (punkty ekstremalne) lub uzyskując nowe twierdzenia (własności typu Kadeca–Klee, punkty ścisłej wypukłości). Ponadto, w pracach [H6] oraz [H8] zbadano własności niekwadratowościowe klasycznych przestrzeni Orlicza–Lorentza. W końcu, stosując zmodyfikowane techniki z prac [H6, H8] znaleziono kryteria niekwadratowości uogólnionych przestrzeni Orlicza–Lorentza.

Przypomnijmy, że odgrywająca ważną rolę w teorii interpolacji przestrzeń Lorentza $\Lambda_{p,\omega}$ została zdefiniowana na początku lat pięćdziesiątych ubiegłego wieku (patrz [40, 41] oraz [17, 18]). Ponad trzydzieści lat później rozpoczęto badanie przestrzeni Orlicza–Lorentza $\Lambda_{\psi,\omega}$ (patrz [44], [30–32] oraz [48, 49]). Zarówno przestrzenie Lorentza jak i Orlicza–Lorentza są cały czas intensywnie badane (patrz [1, 33, 34, 38, 47, 53]), przy czym w badaniu tych drugich istotną rolę odgrywa fakt, że są one przestrzeniami Calderona–Łozanowskiego (patrz [22]).[3]

Konstrukcja uogólnionych przestrzeni Orlicza–Lorentza opiera się na pomyśle zastąpienia generującej przestrzeń Orlicza–Lorentza pary (ψ, ω), gdzie ψ jest funkcją Orlicza a ω spełniającą określone warunki funkcją wagową, funkcją Musielaka–Orlicza φ. Jak pokażemy później, powstała w ten sposób klasa przestrzeni jest znacznie szersza niż klasa przestrzeni Orlicza–Lorentza. Zauważmy także, że wprowadzone przestrzenie nie są uogólnionymi przestrzeniami Calderona–Łozanowskiego.

Przedstawiając uzyskane wyniki, będziemy równolegle omawiać przypadki funkcyjny i ciągowy. W celu zachowania przejrzystości fragmenty dotyczące przypadku ciągowego będą oznaczone „pionowym paskiem" na prawym marginesie.

[2] Należy tutaj zauważyć, że po raz pierwszy ciągowe uogólnione przestrzenie Orlicza–Lorentza były rozważane przez Marka Nawrockiego w jego pracy doktorskiej ([51]), jednak w tamtym przypadku generowana przez ciąg wklęsłych funkcji Orlicza przestrzeń była F-przestrzenią.

[3] Ilekroć w niniejszym autoreferacie będziemy pisali o przestrzeniach Calderona–Łozanowskiego, będziemy mieli na myśli ich szczególny przypadek generowany przez przestrzeń Köthego E oraz funkcję Orlicza ψ i oznaczany symbolem E_ψ (patrz [22]). W szczególności jeżeli przyjmiemy, że E jest przestrzenią Lorentza $\Lambda_{1,\omega}$, wówczas $(\Lambda_{1,\omega})_\psi = \Lambda_{\psi,\omega}$.

Analogicznie uogólniona przestrzeń Calderona–Łozanowskiego E_φ będzie generowana przez przestrzeń Köthego E oraz funkcję Musielaka–Orlicza φ.

3.2.1. Uogólniona przestrzeń Orlicza–Lorentza, warunki (L1) i (L2)

Niech $L^0 = L^0([0,\gamma), m)$ będzie przestrzenią mierzalnych w sensie Lebesgue'a funkcji rzeczywistych określonych na przedziale $[0,\gamma)$, gdzie $0 < \gamma \leqslant \infty$. Jak zwykle dla dowolnych $x, y \in L^0$ będziemy pisać $x \leqslant y$, o ile $x(t) \leqslant y(t)$ prawie wszędzie na przedziale $[0,\gamma)$ ze względu na miarę Lebesgue'a m.

Dla dowolnego $x \in L^0$ definiujemy funkcję dystrybucji $\mu_x\colon [0,+\infty) \to [0,\gamma]$ wzorem

$$\mu_x(\lambda) = m(\{t \in [0,\gamma)\colon |x(t)| > \lambda\})$$

(patrz [2], [36] i [39]) oraz „nierosnące przestawienie" $x^*\colon [0,\gamma) \to [0,\infty]$ funkcji x, gdzie

$$x^*(t) = \inf\{\lambda \geqslant 0\colon \mu_x(\lambda) \leqslant t\}$$

(przyjmując konwencję, że $\inf \emptyset = \infty$). Funkcje $x, y \in L^0$ będziemy nazywać równomierzalnymi, jeżeli $\mu_x(\lambda) = \mu_y(\lambda)$ dla dowolnego $\lambda \geqslant 0$ lub równoważnie $x^*(t) = y^*(t)$ dla każdego $t \in [0,\gamma)$.

Niech (R_1, Σ_1, μ_1) i (R_2, Σ_2, μ_2) będą zupełnymi, σ-skończonymi przestrzeniami miary. Odwzorowanie σ z R_1 w R_2 jest nazywane przekształceniem zachowującym miarę, jeżeli dla każdego Σ_2-mierzalnego podzbioru A z R_2 zbiór $\sigma^{-1}(A) = \{t \in R_1\colon \sigma(t) \in A\}$ jest Σ_1-mierzalnym podzbiorem R_1 oraz $\mu_1(\sigma^{-1}(A)) = \mu_2(A)$ (patrz [2]).

W przypadku ciągowym przez l^0 oraz m bedziemy oznaczać odpowiednio przestrzeń wszystkich ciągów $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ oraz miarę liczącą. Analogicznie jak wyżej dla dowolnego $x \in l^0$ definiujemy $\mu_x\colon [0,+\infty) \to \mathbb{N} \cup \{0,\infty\}$ i $x^* = (x^*(i))_{i=1}^{\infty}$ wzorami

$$\mu_x(\lambda) = m(\{i \in \mathbb{N}\colon |x(i)| > \lambda\})$$

oraz

$$x^*(i) = \inf\{\lambda \geqslant 0\colon \mu_x(\lambda) < i\}.$$

Odwzorowanie $\varphi\colon [0,\gamma) \times [-\infty,\infty] \to [0,\infty]$ będziemy nazywać funkcją Musielaka–Orlicza, jeżeli dla m–prawie wszystkich $t \in [0,\gamma)$ funkcja $\varphi(t,\cdot)\colon [-\infty,\infty] \to [0,\infty]$ (naszą definicję rozszerzamy z R na $R^e := [-\infty,\infty]$ przyjmując $\varphi(t,-\infty) = \varphi(t,\infty) = \infty$) jest funkcją Orlicza; to znaczy jest wypukła, parzysta, znikająca i ciągła w zerze, lewostronnie ciągła na przedziale $(0,\infty)$ i nierówna tożsamościowo zeru na przedziale $(-\infty,\infty)$; oraz dla dowolnego $u \in R_+$ funkcja $\varphi(\cdot,u)$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a (patrz [8], [45] i [50]).

Dla dowolnej funkcji Musielaka–Orlicza φ definiujemy na L^0 funkcjonał ϱ_φ wzorem

$$\varrho_\varphi(x) = \int_0^\gamma \varphi(t, x^*(t))dt.$$

Podstawowym problemem, jaki należało rozwiązać, było znalezienie najsłabszego warunku, którego spełnienie przez funkcję φ powodowałoby wypukłość powyższego funkcjonału, co z kolei gwarantowałoby, że zdefiniowany za jego pomocą funkcjonał Minkowskiego byłby normą. W tym celu wprowadzono warunek (L1).

Definicja 1f ([H3, Definition 1.1]). *Oznaczmy* $U_\infty = \{u \geqslant 0\colon \int_0^t \varphi(s,u)ds < \infty$ *dla pewnego* $t = t(u) > 0\}$ *i* $u_\infty = \sup U_\infty$. *Będziemy mówić, że funkcja Musielaka–Orlicza* φ *spełnia warunek* (L1)*, jeżeli istnieje zbiór* A *miary zero taki, że dla dowolnych* $s,t \in [0,\gamma)\backslash A$*,* $s < t$*, oraz dowolnego* $u \in [0,u_\infty)$ *mamy* $p(s,u) \geqslant p(t,u)$*, gdzie* $p(t,\cdot)$ *oznacza prawostronną pochodną funkcji* $\varphi(t,\cdot)$*, lub równoważnie, jeżeli dla dowolnych* $s,t \in [0,\gamma)\backslash A$*,* $s < t$*, funkcja* $F_{s,t}(u) := \varphi(s,u) - \varphi(t,u)$ *jest niemalejąca na przedziale* $[0,u_\infty)$*.*

Jak pokazano w dowodzie Twierdzenia 1.2 w pracy [H3], jeżeli funkcja φ spełnia warunek (L1), wówczas dla dowolnej funkcji prostej x o zwartym nośniku zachodzi nierówność

$$\int_0^\gamma \varphi(t,x(t))dt \leqslant \int_0^\gamma \varphi(t,x^*(t))dt. \tag{1}$$

Z tego punktu widzenia możemy stwierdzić, że poszukiwanie warunku (L1) nawiązuje do problemu postawionego przez Georga G. Lorentza w pracy [42] a sam warunek (L1) spełnia nierówność (4) z tej pracy. Ponadto należy dodać, że równoważna definicja warunku (L1) za pomocą funkcji $F_{s,t}$ dla przypadku ciągowego została po raz pierwszy podana przez Marka Nawrockiego (patrz [51]). W [H3] udowodniono następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1f ([H3, Theorem 1.2]). *Następujące warunki są równoważne:*

(i) *funkcja Musielaka–Orlicza* φ *spełnia warunek* (L1)*,*

(ii) *dla dowolnego* $x \in L^0$ *zachodzi równość* $\varrho_\varphi(x) = \sup_\sigma \int_0^\gamma \varphi(t,x(\sigma(t)))dt$*, gdzie* $\sigma\colon [0,\gamma) \to [0,\gamma)$ *oznacza przekształcenie zachowujące miarę a supremum jest brane po wszystkich przekształceniach zachowujących miarę z* $[0,\gamma)$ *w siebie,*

(iii) *funkcjonał* ϱ_φ *jest wypukły.*

W dowodzie implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$ istotna jest obserwacja, że jeżeli funkcja φ spełnia warunek (L1), wówczas dla dowolnego zbioru E, $E \subset [0,\gamma)$, $m(E) < \infty$, oraz dla dowolnych $0 \leqslant u < v < u_\infty$ (lub $0 \leqslant u < v \leqslant u_\infty$ jeżeli $u_\infty \in U_\infty$) zachodzi nierówność

$$\int_E (\varphi(t,v) - \varphi(t,u))dt \leqslant \int_{[0,m(E))} (\varphi(t,v) - \varphi(t,u))dt.$$

Z nierówności tej dla dowolnej funkcji prostej x o zwartym nośniku wynika nierówność (1), skąd w konsekwencji dostajemy równość

$$\varrho_\varphi(x) = \sup_\sigma \int_0^\gamma \varphi(t,x(\sigma(t)))dt$$

najpierw dla funkcji prostych, a potem dla dowolnych funkcji $x \in L^0$.

Z kolei w dowodzie implikacji $(iii) \Rightarrow (i)$ kluczowe było wykazanie, że dla dowolnego, nieujemnego i wymiernego u funkcja $p(\cdot, u)$ jest z dokładnością do zbioru miary zero pochodną funkcji wklęsłej.

Załóżmy teraz, że φ spełnia warunek (L1), lub równoważnie, że funkcjonał ϱ_φ jest modularem wypukłym. Wówczas uogólniona funkcyjna przestrzeń Orlicza–Lorentza

$$\Lambda_\varphi = \{x \in L^0 \colon \varrho_\varphi(\beta x) < \infty \ \text{ dla pewnego } \ \beta > 0\},$$

jest przestrzenią unormowaną z normą Luxemburga

$$\|x\| = \inf\left\{\beta > 0 \colon \varrho_\varphi\left(\tfrac{x}{\beta}\right) \leqslant 1\right\}.$$

Ponieważ przestrzeń ta ma własność Fatou (patrz [H3, Theorem 1.3]), na mocy Twierdzenia 1 w [43], jest przestrzenią Banacha. Łatwo także pokazać, że uogólniona przestrzeń Orlicza–Lorentza jest przestrzenią symetryczną.

Rozważając przypadek ciągowy dla dowolnej funkcji Musielaka–Orlicza $\varphi = (\varphi_i)_{i=1}^\infty$, będącej ciągiem funkcji Orlicza, definiujemy na l^0 funkcjonał

$$\varrho_\varphi(x) = \sum_{i=1}^\infty \varphi_i(x^*(i)).$$

Przyjmując następującą definicję warunku (L1)

Definicja 1c ([H1, s. 182]). *Niech $b_\varphi^1 = \sup\{u \geqslant 0 \colon \varphi_1(u) < \infty\}$. Będziemy mówić, że funkcja Musielaka–Orlicza φ spełnia warunek* (L1), *jeżeli $p_i(u) \geqslant p_{i+1}(u)$ dla dowolnych $i \in \mathbb{N}$ i $u \in [0, b_\varphi^1)$, gdzie p_i oznacza prawostronną pochodną funkcji φ_i, lub równoważnie, jeżeli funkcja $F_i(u) := \varphi_i(u) - \varphi_{i+1}(u)$ jest niemalejąca na przedziale $[0, b_\varphi^1)$ dla dowolnych $i \in \mathbb{N}$,*

otrzymujemy

Twierdzenie 1c ([H1, Theorem 2.2]). *Następujące warunki są równoważne:*

(i) *funkcja Musielaka–Orlicza φ spełnia warunek* (L1),

(ii) *dla dowolnego $x \in l^0$ zachodzi równość $\varrho_\varphi(x) = \sup_\sigma \sum_{i=1}^\infty \varphi_i(x(\sigma(i)))$, gdzie σ oznacza permutację zbioru $\mathbb{N}$ a supremum jest brane po wszystkich permutacjach zbioru $\mathbb{N}$.*

W konsekwencji, jeżeli φ spełnia warunek (L1), uogólniona ciągowa przestrzeń Orlicza–Lorentza

$$\lambda_\varphi = \{x \in l^0 \colon \varrho_\varphi(\beta x) < \infty \ \text{ dla pewnego } \ \beta > 0\}$$

z określoną na niej normą Luxemburga jest symetryczną przestrzenią Banacha.[4]

W badaniach uogólnionych przestrzeni Orlicza–Lorentza istotną rolę odgrywa także warunek (L2). Dla przestrzeni ciągowych został on wprowadzony przez Marka Nawrockiego (patrz [51]). Natomiast w przypadku funkcyjnym zdefiniowano go w pracy [H3].

Definicja 2f ([H3, Definition 1.5]). *Przyjmijmy, że funkcja Musielaka–Orlicza φ spełnia warunek* (L1). *Będziemy mówić, że φ spełnia warunek* (L2(0))*, jeżeli $u_\infty = \infty$, to znaczy $\int_0^t \varphi(s,u)ds < \infty$ dla dowolnych $u > 0$ i $t \in (0,\gamma)$. Jeżeli $\gamma = \infty$, wówczas funkcja Musielaka–Orlicza φ spełnia warunek* (L2(∞))*, jeżeli $\int_t^\infty \varphi(s,u)ds = \infty$ dla dowolnych $u > 0$ i $t \in (0,\infty)$. Będziemy mówić, że φ spełnia warunek* (L2)*, jeżeli φ spełnia warunek* (L2(0)) *kiedy tylko $\gamma < \infty$ i φ spełnia warunki* (L2(0)) *i* (L2(∞)) *w przeciwnym przypadku.*

W [H3, Theorem 1.8] pokazano, że jeżeli φ nie spełnia warunku (L2), wówczas Λ_φ jest trywialna lub zawiera porządkową liniowo-izometryczną kopię l^∞.

W przypadku ciągowym będziemy mówić, że funkcja φ spełnia warunek (L2), jeżeli $\sum_{i=1}^\infty \varphi_i(u) = \infty$ dla dowolnego $u > 0$. Łatwo pokazać, że jeżeli φ spełnia ten warunek, to $\lambda_\varphi \hookrightarrow c_0$. W przeciwnym przypadku, to znaczy kiedy istnieje $u > 0$, dla którego $\sum_{i=1}^\infty \varphi_i(u) < \infty$, przestrzeń λ_φ zawiera porządkową liniowo-izometryczną kopię l^∞ (patrz [H1, Theorem 2.4]).

Jak pokazano w pracach [H5, Examples 1.1–1.2] i [H7, Examples 1.1–1.3], klasa uogólnionych przestrzeni Orlicza–Lorentza jest znacznie szersza niż dotychczas rozważana klasa przestrzeni Orlicza–Lorentza. Należą do niej między innymi dwu-wagowe przestrzenie Orlicza–Lorentza (patrz [34]). Ponadto, w niektórych przypadkach teorię uogólnionych przestrzeni Orlicza–Lorentza można wykorzystać do symetryzacji przestrzeni Nakano (patrz [12]). Warto tutaj zauważyć, że o ile w klasycznych przestrzeniach Orlicza–Lorentza warunki (L1) i (L2) redukują się do warunków dobrze znanych z teorii tych przestrzeni (patrz [H5, Example 1.1] i [H7, Example 1.1]), o tyle w przypadku dwu-wagowych przestrzeni Orlicza–Lorentza sytuacja jest znacznie bardziej skomplikowana (patrz [H7, Example 1.2][5]). W [H5, Example 1.2] i [H7, Example 1.3] pokazano, że

[4] W pracy [H1, ss. 182-183] najpierw zdefiniowano modular wypukły

$$\varrho_\varphi(x) := \sup_\sigma \sum_{i=1}^\infty \varphi_i(x(\sigma(i))),$$

gdzie (tak jak w Twierdzeniu 1c) σ oznacza permutację zbioru $\mathbb{N}$. Za pomocą tego modularu zdefiniowano przestrzeń λ_φ i przyjęto, że będzie ona nazywana uogólnioną przestrzenią Orlicza–Lorentza jeżeli zachodzi równość $\varrho_\varphi(x) = \sum_{i=1}^\infty \varphi_i(x^*(i))$. W późniejszych pracach (prace [H3]-[H5] - przypadek funkcyjny oraz praca [H7] - przypadek ciągowy) przyjęto konwencję prezentowaną także w tym autoreferacie.

[5] Analogiczne rozważania jak w [H7, Example 1.2] można przeprowadzić także dla dwu-wagowych funkcyjnych przestrzeni Orlicza–Lorentza.

wykorzystanie teorii uogólnionych przestrzeni Orlicza–Lorentza do symetryzacji przestrzeni Nakano, generowanych przez funkcję Musielaka–Orlicza $\varphi(t,u) = u^{p(t)}$ (odpowiednio $\varphi_i(u) = u^{p(i)}$), zależy od istnienia nowej funkcji Musialaka–Orlicza $\bar{\varphi}$ spełniającej warunek (L1), dla której zachodzi równość $\bar{\varphi}(t,u) = \varphi(t,u)$ dla m–prawie wszystkich $t \in [0,\gamma)$ i każdego $u \geqslant 0$ kiedy tylko $\int_0^t \varphi(s,u)ds \leqslant 1$ (odpowiednio $\bar{\varphi}_i(u) = \varphi_i(u)$ dla dowolnych $i \in \mathbb{N}$ i $u \geqslant 0$ kiedy tylko $\sum_{j=1}^{i} \varphi_j(u) \leqslant 1$).

Uwaga 1. W dalszym ciągu naszych rozważań będziemy zakładać, że funkcja φ spełnia warunek (L1) oraz (jeżeli nie założymy, że jest inaczej) **warunek (L2).** Ponadto, rozważając przypadek funkcyjny, bez straty ogólności możemy założyć, że nierówność $p(s,u) \geqslant p(t,u)$ zachodzi dla dowolnych $s,t \in [0,\gamma)$, $s \leqslant t$, oraz dowolnego $u \in [0,\infty)$ (patrz Definicja 1f).

Uwaga 2. W dalszej części autoreferatu, ilekroć będziemy mówić o funkcyjnej przestrzeni Orlicza–Lorentza $\Lambda_{\psi,\omega}$, będziemy zakładali, że $\varphi(t,u) = \psi(u)\omega(t)$, gdzie ψ jest przyjmującą skończone wartości funkcją Orlicza a $\omega = \omega(t)$ nieujemną (nietrywialną), nierosnącą, lokalnie całkowalną funkcją wagową (patrz [H5, Example 1.1]). Analogicznie, w przypadku ciągowych przestrzeni Orlicza–Lorentza $\lambda_{\psi,\omega}$ będziemy przyjmować $\varphi_i(u) = \psi(u)\omega(i)$, gdzie ψ jest funkcją Orlicza, dla której zachodzi nierówność $\psi(b_\psi) > 0$ kiedy tylko $b_\psi := \sup\{u \geqslant 0\colon \psi(u) < \infty\} < \infty$, a $\omega = (\omega(i))_{i=1}^{\infty}$ nieujemnym (nietrywialnym), nierosnącym ciągiem wagowym (patrz [H7, Example 1.1]). Zgodnie z przyjętym w pracach dotyczących przestrzeni Orlicza–Lorentza zwyczajem, nie będziemy automatycznie zakładać warunku (L2(∞)) w przypadku funkcyjnym oraz warunku (L2) w przypadku ciągowym.

Na koniec tego paragrafu podamy kilka uwag dotyczących technik dowodowych stosowanych w przypadku uogólnionych przestrzeni Orlicza–Lorentza. Po pierwsze zauważmy, że (w odróżnieniu od przestrzeni Orlicza–Lorentza, które są przestrzeniami Calderona–Łozanowskiego) nie są one uogólnionymi przestrzeniami Calderona–Łozanowskiego, co nie tylko uniemożliwia korzystanie z wyników prac [D1, D2, D3], ale także nie pozwala korzystać z metody stosowanej chociażby w pracach [H6, H8] (patrz Uwaga 3 na stronach Z2-24–Z2-25). W konsekwencji w wielu sytuacjach należało zastosować nowe pomysły i techniki dowodowe.

Przypomnijmy także, iż analogicznie jak w przypadku innych przestrzeni definiowanych za pomocą „nierosnącego przestawienia” x^*, w dowodach wielu twierdzeń ważną rolę odgrywa możliwość „przejścia z x^* do x”. O ile w przypadku ciągowym dla dowolnego $x \in l^0$ spełniającego warunek $m(\{i\colon |x(i)| \geqslant \lim_{i\to\infty} x^*(i)\}) = \infty$ istnieją zbiór $N_0 \subseteq \mathbb{N}$ oraz bijekcja (permutacja o ile $N_0 = \mathbb{N}$) $\sigma\colon \mathbb{N} \to N_0$, dla których $x^* = |x| \circ \sigma$, o tyle w przypadku funkcyjnym sytuacja jest dużo bardziej skomplikowana. Jak pokazano w [2, Example 7.7, ss. 85-86], w przypadku funkcyjnym przekształcenie zachowujące miarę nie może w ogólności pełnić analogicznej roli jak bijekcja (permutacja) w przypadku ciągowym. Dlatego w jego miejsce zastosowano zbiory $e_t(x)$ zdefiniowane na stronie 64 w [36].

3.2.2. Warunki Δ_2^Λ i δ_2^λ

W badaniach przestrzeni modularnych istotną rolę odgrywają warunki typu Δ_2. Także w przypadku uogólnionych przestrzeni Orlicza–Lorentza zaistniała potrzeba wprowadzenia takich warunków. Najpierw w pracy [H1] zdefiniowano warunek δ_2^λ, używany w przestrzeniach λ_φ a następnie w pracy [H3] zdefiniowano warunek Δ_2^Λ dla przypadku funkcyjnego. Zgodnie z przyjętą w tym opracowaniu konwencją najpierw przypomnimy definicję warunku Δ_2^Λ.

Weźmy dowolną liczbę dodatnią $a > 0$. Wówczas, dla każdego $t \in (0, \gamma)$ istnieje dokładnie jedna liczba $0 < f_a(t) < \infty$ spełniająca równanie

$$\int_0^t \varphi(s, f_a(t))ds = a.$$

Funkcja $f_a(t)$ jest nierosnącą (malejąca jeżeli $\gamma = \infty$) i ciągłą funkcją, dla której zachodzą równości $\lim_{t\to 0} f_a(t) = \infty$ i $\lim_{t\to\infty} f_a(t) = 0$, jeżeli $\gamma = \infty$. Ponadto, dla dowolnego $t_0 \in (0, \gamma)$ dostajemy

$$(2) \qquad \int_0^{t_0} \varphi(t, f_a(t))dt = \infty \text{ oraz } \int_{t_0}^{\infty} \varphi(t, f_a(t))dt = \infty \text{ kiedy tylko } \gamma = \infty.$$

Definicja 3f ([H3, Definition 2.3]). *Będziemy mówić, że funkcja Musielaka–Orlicza φ spełnia warunek Δ_2^Λ (w skrócie $\varphi \in \Delta_2^\Lambda$), jeżeli istnieją zbiór B miary zero, stałe $a, K > 0$ i funkcja $h = h(t) \in L_+^1([0, \gamma))$ (gdzie $L_+^1([0, \gamma))$ oznacza stożek dodatni przestrzeni $L^1([0, \gamma))$) takie, że nierówność*

$$(3) \qquad \varphi(t, 2u) \leqslant K\varphi(t, u) + h(t)$$

zachodzi dla wszystkich $t \in [0, \gamma)\backslash B$ i $u \in [0, f_a(t)]$.

W [H3, Theorem 2.4] pokazano, że jeżeli funkcja φ spełnia warunek Δ_2^Λ, wówczas przestrzeń Λ_φ jest równa swojej podprzestrzeni Λ_φ^o, gdzie

$$\Lambda_\varphi^o = \{x \in L^0 \colon \varrho_\varphi(\beta x) < \infty \text{ dla każdego } \beta > 0\}.$$

W dowodzie tej implikacji istotną rolę odgrywają własności (2), z których wynika, że dla dowolnego $a > 0$ i dowolnego x spełniającego nierówność $\varrho_\varphi(x) < \infty$ istnieją liczby t_1 i t_2, $0 < t_1 \leqslant t_2 < \infty$ takie, że $x^*(t) \leqslant f_a(t)$ dla każdego $t \in [0, t_1] \cup [t_2, \infty)$.

Nie wiadomo jednak, czy warunek Δ_2^Λ jest najsłabszym warunkiem gwarantującym równość $\Lambda_\varphi^o = \Lambda_\varphi$.[6] Dokładniej, nie wiadomo czy z faktu, że funkcja φ nie spełnia warunku Δ_2^Λ wynika istnienie $x_o \in \Lambda_\varphi$ spełniającego warunki $\varrho_\varphi(x_o) < 1$ i $\varrho_\varphi(\beta x_o) = \infty$

[6] Oczywiście pytanie o to czy warunek Δ_2^Λ jest nasłabszy ma sens tylko wtedy, gdy warunek ten nie wynika automatycznie z warunku (L1). Postępując analogicznie jak w [H7, Example 1.2, Remark 2.1(iii)] można pokazać, że taka sytuacja może mieć miejsce także w przypadku niektórych dwu-wagowych funkcyjnych przestrzeni Orlicza–Lorentza.

dla dowolnego $\beta > 1$. Głównym problemem przy ewentualnej konstrukcji takiego elementu x_o jest niemożliwość kontroli „regularności zaburzeń" funkcji φ, co nie pozwala korzystać z metod stosowanych w klasycznych przestrzeniach Orlicza–Lorentza (patrz [30] i [6]). Z drugiej strony korzystanie z technik stosowanych w przestrzeniach Musielaka–Orlicza oraz uogólnionych przestrzeniach Calderona–Łozanowskiego jest niemożliwe ze względu na fakt, że konstruowany w tamtych przypadkach element jest z reguły różny od swojego „nierosnącego przestawienia" (patrz [D1, D3]). Na koniec tych rozważań dodajmy, że istnienie takiego elementu x_o oznaczałoby także zawieranie przez przestrzeń Λ_φ porządkowej liniowo-izometrycznej kopii l^∞ (patrz [20]).

Pozostawiając nierozstrzygniętym problem, czy wprowadzony warunek Δ_2^Λ jest najsłabszym z możliwych, możemy stwierdzić, że jego wprowadzenie było w pełni uzasadnione. Jak bowiem pokazano w [H3, Examples 2.6–2.7], w klasie funkcji Musielaka–Orlicza spełniających warunki (L1) i (L2), jest on istotnie słabszy od warunku Δ_2, używanego w przestrzeniach Musielaka–Orlicza (gdzie w warunku Δ_2 zakładamy, iż nierówność (3) zachodzi dla m–prawie wszystkich $t \in [0, \gamma)$ i każdego $u \geqslant 0$). Ponadto, znaleziono przykłady funkcji Musielaka–Orlicza spełniających warunki (L1) i (L2), dla których nie zachodzi równość $\Lambda_\varphi^o = \Lambda_\varphi$ a tym samym niespełniających warunku Δ_2^Λ (patrz [H3, Examples 2.8–2.9]).

W przypadku ciągowym dla dowolnego, ustalonego $a \in (0, \varphi_1(\frac{1}{2}b_\varphi^1))$ możemy znaleźć ciąg $(\alpha_i^a)_{i=1}^\infty$ liczb dodatnich, spełniających dla każdego $i \in \mathbb{N}$ równanie $\sum_{j=1}^i \varphi_j(\alpha_i^a) = a$. Mamy $\alpha_i^a > \alpha_{i+1}^a$ dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$, $\lim_{i\to\infty} \alpha_i^a = 0$ oraz $\sum_{i=1}^\infty \varphi_i(\alpha_i^a) = \infty$.

Definicja 3c ([H1, s. 185]). *Będziemy mówić, że funkcja Musielaka–Orlicza φ spełnia warunek δ_2^λ (w skrócie $\varphi \in \delta_2^\lambda$) jeżeli istnieją stałe $a \in (0, \varphi_1(\frac{1}{2}b_\varphi^1))$, $K > 0$ oraz ciąg $c = (c_i)_{i=1}^\infty \in l_+^1$ (gdzie l_+^1 oznacza stożek dodatni przestrzeni l^1) takie, że nierówność*

$$\varphi_i(2u) \leqslant K\varphi_i(u) + c_i$$

zachodzi dla każdego $i \in \mathbb{N}$ i każdego $u \in [0, \alpha_i^a]$.

Analogicznie jak w przypadku funkcyjnym, warunek δ_2^λ pociąga równość $\lambda_\varphi = \lambda_\varphi^o$, gdzie

$$\lambda_\varphi^o = \{x \in l^0 \colon \forall\, \beta > 0\; \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ takie, że } \sum_{i=k}^\infty \varphi_i(\beta x^*(i)) < \infty\}$$

(patrz [H1, Theorem 3.1]). Pokazując, że wprowadzony warunek δ_2^λ jest istotnie słabszy od warunku δ_2 używanego w teorii ciągowych przestrzeni Musielaka–Orlicza (patrz [H1, Examples 3.3–3.4]), także tutaj nie rozstrzygnięto czy warunek ten jest najsłabszym warunkiem gwarantującym równość $\lambda_\varphi = \lambda_\varphi^o$.

Tak jak w innych przestrzeniach modularnych, warunki Δ_2^Λ i δ_2^λ razem z warunkiem, że funkcja φ nie znika poza zerem[7], gwarantują równoważność zbieżności normowej i

[7] W przypadku funkcyjnym, gdy $\gamma = \infty$, oraz w przypadku ciągowym wynika on automatycznie odpowiednio z warunków (L2(∞)) i (L2).

modularnej odpowiednio w przestrzeniach Λ_φ i λ_φ. Ponadto, zakładając dodatkowo w przypadku ciągowym, że $\varphi_1(b_\varphi^1) \geqslant 1$, dostajemy równość $\varrho_\varphi(x) = 1$ dla dowolnego elementu sfery jednostkowej obydwu przestrzeni.

Z reguły (na przykład w przestrzeniach Calderona–Łozanowskiego, w tym w przestrzeniach Orlicza–Lorentza, oraz w funkcyjnych przestrzeniach Musielaka–Orlicza) warunek typu Δ_2 wykorzystywano także do wykazania, że dla dowolnego ciągu (x_n) elementów kuli jednostkowej, ciąg modularów dąży do 1, o ile ciąg norm dąży do 1. Zależność ta ma szczególne znaczenie przy badaniu „własności jednostajnych". W pracach [H5] oraz [H7] pokazano, że w przypadku uogólnionych przestrzeni Orlicza–Lorentza, zarówno funkcyjnych jak i ciągowych, dla uzyskania takiego efektu istnieje konieczność wprowadzenia silniejszych warunków, które nazwano odpowiednio silnym warunkiem Δ_2^Λ oraz silnym warunkiem δ_2^λ. Zachodzi tu analogiczna sytuacja jak w ciągowych przestrzeniach Musielaka–Orlicza, dla których Anna Kamińska w pracy [29] wprowadziła warunek $(*)$ (zobacz także [D3]).

Definicja 4f ([H5, Definition 2.2]). *Funkcja Musielaka–Orlicza φ spełnia silny warunek Δ_2^Λ, jeżeli dla dowolnego $a \in (0,1)$ istnieją zbiór B miary zero, stałe $L > 1$ i $K > 1$ oraz funkcja $h = h(t) \in L_+^1([0,\gamma))$ takie, że nierówność*

$$\varphi(t, Lu) \leqslant K\varphi(t,u) + h(t)$$

zachodzi dla wszystkich $t \in [0,\gamma)\backslash B$ i $u \in [0, f_a(t)]$.

W [H5, Proposition 2.4] pokazano, że jeżeli funkcja φ spełnia silny warunek Δ_2^Λ, wówczas dla dowolnego ciągu (x_n) kuli jednostkowej $B(\Lambda_\varphi)$ mamy $\varrho_\varphi(x_m) \to 1$ kiedy tylko $\|x_m\| \to 1$. Ponadto, znaleziono przykład (patrz [H5, Example 2.1, Remark 2.3]) funkcji Musielaka–Orlicza spełniającej warunki (L1), (L2), Δ_2^Λ i takiej, że generowana przez nią przestrzeń zawiera ciąg (x_n) dla którego $\varrho_\varphi(x_n) = \frac{11}{12}$ oraz $\frac{n+1}{n+2} \leqslant \|x_n\| \leqslant 1$.

W przypadku ciągowym mamy do czynienia z analogiczną sytuacją (patrz [H7, Definition 2.2, Proposition 2.3]). W celu lepszego zrozumienia wprowadzonych warunków warto przytoczyć Przykład 2.1 z pracy [H7]. Najpierw zdefiniowano w nim ciąg (p_n) funkcji niemalejących, prawostronnie ciągłych. Następnie, przy jego pomocy zdefiniowano ciąg funkcji Orlicza, przy czym dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ funkcja p_n definiowała funkcje $\varphi_{k_{n-1}+1}, \ldots, \varphi_{k_n}$, gdzie $k_0 = 0$ a $(k_n)_{n=1}^\infty$ jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Jak pokazano w tym przykładzie, w zależności od doboru ciągu (k_n) funkcja Musielaka–Orlicza φ może spełniać silny warunek δ_2^λ, albo spełniać warunek δ_2^λ ale nie spełniać silnego warunku δ_2^λ, albo nie spełniać (nawet) warunku δ_2^λ.

W [H7, Remarks 2.1–2.2] podano postaci warunku δ_2^λ i silnego warunku δ_2^λ dla ciągowych przestrzeni Orlicza–Lorentza, ciągowych dwu-wagowych przestrzeni Orlicza–Lorentza i ewentualnych symetryzacji ciągowych przestrzeni Nakano. W przypadku funkcyjnym, analogiczne rozważania można przeprowadzić nie tylko dla przestrzeni

Orlicza–Lorentza (patrz [H5, Remarks 2.2-2.3]), ale także dla dwu-wagowych przestrzeni Orlicza–Lorentza i ewentualnych symetryzacji przestrzeni Nakano.

3.2.3. Porządkowa ciągłość, własności typu Kadeca–Klee

W przestrzeniach modularnych warunek typu Δ_2 z reguły gwarantuje porządkową ciągłość badanych przestrzeni. Podobna sytuacja zachodzi w przypadku uogólnionych przestrzeni Orlicza–Lorentza.

Element $x \in E$ nazywać będziemy porządkowo ciągłym, jeżeli dla dowolnego ciągu (x_n) elementów E_+ (dodatni stożek przestrzeni Köthego E), spełniających warunki $0 \leqslant x_n \leqslant |x|$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i $x_n \to 0$ m–prawie wszędzie, dostajemy $\|x_n\|_E \to 0$. Podprzestrzeń E_a wszystkich elementów porządkowo ciągłych w E jest porządkowym ideałem w E. Przestrzeń Köthego E będziemy nazywać porządkowo ciągłą, jeżeli $E_a = E$ (patrz [35] i [39]).

Jak pokazano w [H3, Theorem 3.1], jeżeli funkcja φ spełnia warunek (L2), wówczas przestrzenie Λ_φ^o i $(\Lambda_\varphi)_a$ są nietrywialne i zachodzi równość $\Lambda_\varphi^o = (\Lambda_\varphi)_a$, skąd na mocy [H3, Theorem 2.4] dostajemy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2f ([H3, Theorem 3.2]). *Jeżeli funkcja Musielaka–Orlicza φ spełnia warunek Δ_2^Λ, wówczas przestrzeń Λ_φ jest porządkowo ciągła, lub równoważnie, przestrzeń Λ_φ jest ośrodkowa.*

Analogiczna sytuacja zachodzi w przypadku ciągowym. Na mocy [H1, Theorem 4.2(iv)] mamy $\lambda_\varphi^o = (\lambda_\varphi)_a$, skąd korzystając z [H1, Theorem 3.1] dostajemy, że λ_φ jest porządkowo ciągła, o ile φ spełnia warunek δ_2^λ ([H1, Theorem 4.3])

Mówimy, że przestrzeń Köthego E ma własność Kadeca–Klee względem lokalnej zbieżności według miary, jeżeli dla dowolnego $x \in E$ i dowolnego ciągu (x_n) elementów przestrzeni E takich, że $\|x_n\|_E \to \|x\|_E$ i $x_n \to x$ lokalnie według miary, dostajemy $\|x_n - x\|_E \to 0$ (patrz [7]). W [15, Proposition 2.1] pokazano, że powyższa własność implikuje porządkową ciągłość.

Podstawowym problemem, jaki należało rozwiązać przy rozpatrywaniu tej własności, było ustalenie warunków, które dla $\gamma = \infty$ gwarantowałyby zbieżność ciągu (x_n^*) do x^* m–prawie wszędzie, kiedy tylko ciąg (x_n) dąży do x lokalnie według miary. Jak wiadomo, jeżeli ciąg (x_n) dąży do x według miary, wówczas $x_n^*(t) \to x^*(t)$ dla wszystkich t, dla których funkcja $x^* = x^*(t)$ jest ciagla (patrz [36], s. 67, 11°). Łatwo pokazać, że powyższa implikacja nie zachodzi, jeżeli $\gamma = \infty$ i w miejsce założenia, że $x_n \to x$ według miary przyjmiemy, że $x_n \to x$ lokalnie według miary. Na przykład ciąg (x_n), gdzie $x_n = \chi_{[n-1,n)}$ dla $n \in \mathbb{N}$, jest zbieżny do $x \equiv 0$ lokalnie według miary, natomiast $x_n^*(t) = 1$ dla każdego $t \in [0, 1)$ i każdego $n \in \mathbb{N}$. Zachodzi jednak następujący lemat.

Lemat 1f ([H3, Lemma 4.1]). *Niech $\gamma = \infty$. Wówczas dla dowolnego $x \in \Lambda_\varphi$ i dowolnego ciągu (x_n) elementów przestrzeni Λ_φ takich, że $x_n \to x$ lokalnie według miary, $\varrho_\varphi(x) = 1$ i $\varrho_\varphi(x_n) = 1$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, dostajemy $x_n^*(t) \to x^*(t)$ we wszystkich punktach ciągłości x^*.*

Na mocy tego lematu oraz [H3, Lemma 4.2] otrzymano

Twierdzenie 3f ([H3, Theorem 4.3]). *Jeżeli funkcja φ spełnia warunek Δ_2^Λ, wówczas przestrzeń Λ_φ ma własność Kadeca–Klee względem lokalnej zbieżności według miary.*

Wynik ten zastosowano do przestrzeni Orlicza–Lorentza $\Lambda_{\psi,\omega}$ (patrz Uwaga 2). Korzystając częściowo ze znanych już faktów (patrz [30, Theorem 2.4] i [15, Proposition 2.1]) pokazano, że w przestrzeni $\Lambda_{\psi,\omega}$ porządkowa ciągłość oraz własność Kadeca–Klee względem lokalnej zbieżności według miary są równoważne i zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja ψ spełnia odpowiedni warunek Δ_2 i $\int_0^\gamma \omega(t)dt = \infty$, o ile $\gamma = \infty$ (patrz [H3, Theorem 7.3]).

W przypadku ciągowym rozważano własności Kadeca–Klee względem zbieżności po współrzędnych lub zbieżności jednostajnej, w których zakłada się, że ciąg (x_n) dąży do x odpowiednio po współrzędnych lub jednostajnie. Badania zapoczątkowane w [H1] kontynuowano w [H7], czego efektem było następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3c ([H7, Theorem 3.1]). *Jeżeli $\varphi \in \Delta_2^\Lambda$, wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) $\varphi_1(b_\varphi^1) \geqslant 1$,
(ii) *przestrzeń λ_φ ma własność Kadeca–Klee ze względu na zbieżność po współrzędnych,*
(iii) *przestrzeń λ_φ ma własność Kadeca–Klee względem zbieżności jednostajnej.*

3.2.4. Własności monotonicznościowe

Kratę Banacha $E = (E, \leqslant, \|\cdot\|_E)$ będziemy nazywać ściśle monotoniczną, jeżeli warunki $x, y \in E_+$ (stożek dodatni kraty E), $y \leqslant x$ i $y \neq x$ implikują $\|y\|_E < \|x\|_E$. Jak zwykle E jest nazywana dolnie (górnie) lokalnie jednostajnie monotoniczną, o ile dla dowolnych $x \in E_+$, $\|x\|_E = 1$ oraz $\varepsilon \in (0,1)$ (odpowiednio $\varepsilon > 0$) istnieje $\delta = \delta(x,\varepsilon) \in (0,1)$ (odpowiednio $\delta = \delta(x,\varepsilon) > 0$) taka, że warunki $y \in E$, $0 \leqslant y \leqslant x$ (odpowiednio $y \geqslant 0$) oraz $\|y\|_E \geqslant \varepsilon$ implikują, że $\|x - y\|_E \leqslant 1 - \delta$ (odpowiednio $\|x + y\|_E \geqslant 1 + \delta$).[8] Mówimy także, że E jest jednostajnie monotoniczna, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon \in (0,1)$ istnieje $\delta(\varepsilon) \in (0,1)$ taka, że $\|x - y\|_E \leqslant 1 - \delta(\varepsilon)$ kiedy tylko $x, y \in E_+$, $y \leqslant x$, $\|x\|_E = 1$ i $\|y\|_E \geqslant \varepsilon$ (patrz [4]).

[8] W pracy [24] znaleziono przykład przestrzeni, która jest dolnie lokalnie jednostajnie monotoniczna a nie jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna; nie wiadomo jednak czy pierwsza z wymienionych własności jest słabsza od drugiej.

Przypomnijmy, że ścisła monotoniczność, dolna i górna lokalna jednostajna monotoniczność oraz jednostajna monotoniczność są obcięciem odpowiednio ścisłej wypukłości, lokalnej jednostajnej wypukłości oraz jednostajnej wypukłości do par elementów porównywalnych ze stożka dodatniego (patrz [23]). Warto także zauważyć, że własności monotonicznościowe są wykorzystywane (choć w mniejszym stopniu niż własności wypukłościowe) w zagadnieniach najlepszej aproksymacji i teorii punktu stałego (patrz odpowiednio [24] i [3]).

Badania własności monotonicznościowych przestrzeni Λ_φ zostały zapoczątkowane w [H3] i kontynuowane w [H5]. Najpierw wykorzystując [D4, Theorem 2.6] oraz [7, Theorem 3.2] w [H3] udowodniono Twierdzenia 4f i 5f.

Twierdzenie 4f ([H3, Theorem 5.1]). *Niech $\gamma < \infty$ i $\varphi \in \Delta_2^\Lambda$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) *$\varphi(t,u) > 0$ dla dowolnych $t \in (0,\gamma)$ i $u > 0$ (patrz* Uwaga 1*),*

(ii) *przestrzeń Λ_φ jest ściśle monotoniczna,*

(iii) *przestrzeń Λ_φ jest dolnie lokalnie jednostajnie monotoniczna,*

(iv) *przestrzeń Λ_φ jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna.*

Twierdzenie 5f ([H3, Theorem 5.2]). *Jeżeli $\gamma = \infty$ oraz $\varphi \in \Delta_2^\Lambda$, wówczas warunki* (ii)*,* (iii) *oraz* (iv) *z Twierdzenia 4f zachodzą i są parami równoważne.*[9]

W przypadku przestrzeni Lorentza oraz Orlicza–Lorentza warunkiem koniecznym jednostajnej monotoniczności była regularność funkcji wagowej (patrz [21, Theorem 1] i [22, Theorem 10]).[10] W pracy [H5] wprowadzono pojęcie regularności funkcji φ.

Definicja 5f ([H5, Definition 3.1]). *Funkcję Musielaka–Orlicza φ będziemy nazywać regularną, jeżeli istnieje $\eta > 0$ taka, że*

$$\int_0^{2t} (\varphi(t,u) - \varphi(t,v))dt \geqslant (1+\eta) \int_0^t (\varphi(t,u) - \varphi(t,v))dt$$

dla dowolnych $t \in \left(0, \frac{\gamma}{2}\right)$ oraz $0 \leqslant v < u \leqslant f_1(t)$, gdzie funkcja f_1 została zdefiniowana na stronie Z2-13.

Zauważmy, że w przypadku przestrzeni Orlicza–Lorentza $\Lambda_{\psi,\omega}$ (patrz Uwaga 2), zachodzenie warunku $\psi(u) > 0$ dla dowolnego $u > 0$ (będącego warunkiem koniecznym ścisłej monotoniczności przestrzeni $\Lambda_{\psi,\omega}$ – patrz [22, Theorem 10]) oznacza, że regularność funkcji φ jest równoważna regularności funkcji wagowej ω. Jak zauważyliśmy na stronie Z2-15, rozważając jednostajną monotoniczność przestrzeni Λ_φ będziemy musieli użyć silnego warunku $\underline{\Delta}_2^\Lambda$ w miejsce warunku Δ_2^Λ.

[9] Zauważmy, że w tym przypadku warunek $\varphi(t,u) > 0$ dla dowolnych $t \in (0,\gamma)$ i $u > 0$ wynika automatycznie z warunku (L2(∞)).

[10] Przypomnijmy, że funkcję wagową ω nazywamy regularną, jeżeli istnieje $\eta > 0$ taka, że $\int_0^{2t} \omega(t)dt \geqslant (1+\eta)\int_0^t \omega(t)dt$ dla dowolnych $t \in \left(0, \frac{\gamma}{2}\right)$ (patrz [41],[18] oraz [32],[21]).

Twierdzenie 6f ([H5, Theorem 3.3]). *Niech $\gamma = \infty$. Jeżeli funkcja Musielaka–Orlicza φ jest regularna i spełnia silny warunek Δ_2^Λ, wówczas przestrzeń Λ_φ jest jednostajnie monotoniczna.*

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystano zmodyfikowane idee z pracy [21]. Natomiast w przypadku miary skończonej, należało postępować bardziej subtelnie (patrz [H5, Lemma 3.1]).

Twierdzenie 7f ([H5, Theorem 3.4]). *Niech $\gamma < \infty$ i niech φ będzie regularną funkcją Musielaka–Orlicza spełniającą silny warunek Δ_2^Λ. Wówczas przestrzeń Λ_φ jest jednostajnie monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(t, u) > 0$ dla dowolnych $t \in [0, \gamma)$ i $u > 0$.*

Badając własności monotonicznościowe w przypadku ciągowym rozważano zarówno przestrzenie λ_φ jak i ich n–wymiarowe podprzestrzenie λ_φ^n.

Twierdzenie 4c ([H7, Theorem 4.2]). *Przestrzeń λ_φ^n, $n \geqslant 2$, jest ściśle monotoniczna (równoważnie jednostajnie monotoniczna) wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi_1(b_\varphi^1) \geqslant 1$ i $\varphi_i(u) > 0$ dla dowolnego $u > 0$ i dowolnego $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Twierdzenie 5c ([H7, Theorem 4.3]). *Jeżeli $\varphi \in \Delta_2^\Lambda$, wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) $\varphi_1(b_\varphi^1) \geqslant 1$,[11]
(ii) *przestrzeń λ_φ jest ściśle monotoniczna,*
(iii) *przestrzeń λ_φ jest dolnie lokalnie jednostajnie monotoniczna,*
(iv) *przestrzeń λ_φ jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna.*

W dowodzie ostatniego Twierdzenia wykorzystano [D4, Theorem 2.7] oraz [H7, Theorem 4.1].

Analogicznie jak w przypadku funkcyjnym wprowadzono pojęcie regularności funkcji φ ([H7, Definition 4.1]) oraz pokazano, że przestrzeń λ_φ jest jednostajnie monotoniczna, kiedy tylko funkcja φ jest regularna i spełnia silny warunek δ_2^λ ([H7, Theorem 4.4]).

3.2.5. Ścisła wypukłość, punkty ekstremalne i punkty ścisłej wypukłości

Przypomnijmy, że *przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_X)$ jest ściśle wypukła, jeżeli dla dowolnych, różnych elementów x i y sfery jednostkowej $S(X)$ dostajemy $\|(x+y)/2\|_X < 1$.* Z kolei *punkt x sfery jednostkowej $S(X)$ nazywamy punktem ekstremalnym kuli jednostkowej $B(X)$, jeżeli dla dowolnych $y, z \in B(X)$ takich, że $x = \frac{y+z}{2}$ mamy $y = z$. Punkt*

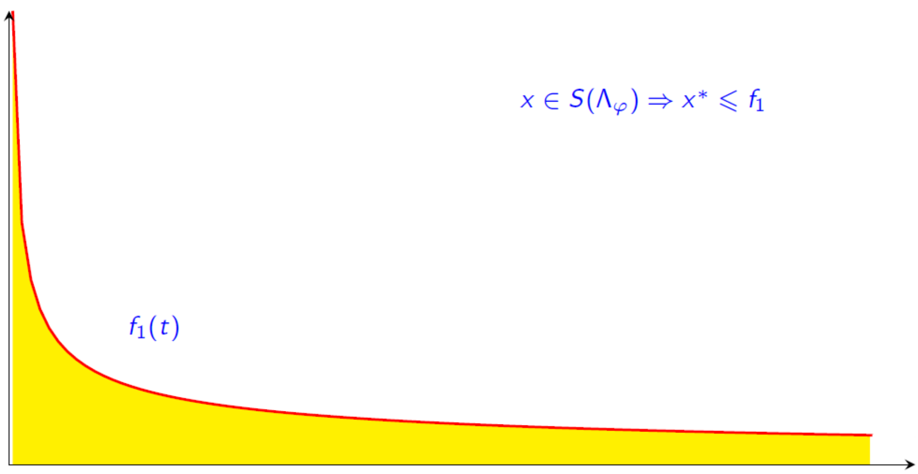
[11] Analogicznie, jak w przypadku funkcyjnym, warunek $\varphi_i(u) > 0$ dla dowolnych $u > 0$ i dowolnego $i \in \mathbb{N}$ wynika z warunku (L2).

$x \in S(X)$ nazywamy punktem ścisłej wypukłości (silnym U-punktem, SU-punktem), jeżeli dla każdego, różnego od x, punktu $y \in B(X)$ mamy $\|(x+y)/2\|_X < 1$.

Oczywiście przestrzeń Banacha jest ściśle wypukła, jeżeli wszystkie punkty sfery jednostkowej są punktami ekstremalnymi kuli jednostkowej, lub równoważnie, wszystkie punkty sfery jednostkowej są punktami ścisłej wypukłości kuli jednostkowej. Jednakże pojęcie punktu ścisłej wypukłości jest silniejsze od pojęcia punktu ekstremalnego; na przykład punkty $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$ oraz $(-1,1)$ będące punktami ekstremalnymi przestrzeni $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ nie są punktami ścisłej wypukłości tej przestrzeni.

Wiadomo, że ścisła wypukłość obok jednostajnej wypukłości pełni ważną rolę w teorii aproksymacji i teorii punktu stałego (patrz [52]). Trudno także przecenić rolę punktów ekstremalnych. Wystarczy tylko zauważyć, że twierdzenie Krejna–Milmana, twierdzenie Choqueta, twierdzenie Rainwatera o zbieżności w słabej topologii, twierdzenie Bessagi–Pełczyńskiego czy też kryterium bezwarunkowej zbieżności Eltona są wyrażone przy pomocy punktów ekstremalnych (patrz [13, Chapter IX]). W pracy [10] pokazano, że element $x \in S(X)$ jest punktem lokalnej jednostajnej wypukłości wtedy i tylko wtedy, gdy x jest punktem ścisłej wypukłości oraz punktem zwartej lokalnej jednostajnej wypukłości. Ponadto, pojęcie punktu ścisłej wypukłości odgrywa istotną rolę w problemie lokalnej najlepszej aproksymacji (patrz [D5]).

W celu zbadania ścisłej wypukłości przestrzeni Λ_φ, należało najpierw znaleźć najsłabszy warunek na „ścisłą wypukłość” funkcji φ, który razem z warunkiem Δ_2^Λ gwa-



Rysunek 1.

rantowałby zachodzenie rozważanej własności. Przypomnijmy, że w przypadku funkcyjnych przestrzeni Musielaka–Orlicza należało założyć, że dla m–prawie wszystkich

$t \in [0, \gamma)$ funkcja $\varphi(t, \cdot)$ jest ściśle wypukła na całym przedziale $[0, \infty)$ (patrz [19]). W naszym przypadku tak silny warunek nie był potrzebny.

Zauważmy najpierw, że dla dowolnego elementu x sfery jednostkowej $S(\Lambda_\varphi)$ zachodzi nierówność $x^*(t) \leqslant f_1(t)$ dla każdego $t \in [0, \gamma)$ (gdzie funkcja f_1 została zdefiniowana na stronie Z2-13), co ilustruje Rysunek 1. Zatem w naszych rozważaniach wystarczy ograniczyć się do obszaru leżącego „poniżej wykresu" funkcji f_1. Jednak także w tym „obszarze" nie ma potrzeby zakładać ścisłej wypukłości funkcji $\varphi(t, \cdot)$ dla m–prawie wszystkich $t \in [0, \gamma)$. W pracy [H3] wprowadzono warunek (+).

Definicja 6f ([H3, Definition 6.1])**.** *Będziemy mówić, że funkcja Musielaka–Orlicza φ spełnia warunek (+), jeżeli dla dowolnych $t_1, t_2 \in [0, \gamma)$, $t_1 < t_2$, oraz $u, v \in \mathbb{R}_+$, $u < v \leqslant f_1(t_2)$, istnieje mierzalny zbiór $B \subset [t_1, t_2]$ taki, że $m(B) > 0$ oraz*

$$\varphi\left(t, \frac{u+v}{2}\right) < \frac{1}{2}\{\varphi(t, u) + \varphi(t, v)\} \tag{4}$$

dla m–prawie wszystkich $t \in B$.

Co istotne, znaleziono przykład funkcji Musielaka–Orlicza φ, która spełnia warunki (L1), (L2), Δ_2^Λ oraz (+) i dla której nie zachodzi warunek: $\varphi(t, \cdot)$ jest ściśle wypukła na przedziale $[0, f_1(t)]$ dla m–prawie wszystkich $t \in [0, \gamma)$ (patrz [H3, Example 6.3]).[12] Udowodniono także następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8f ([H3, Theorem 6.5])**.** *Niech funkcja φ spełnia warunek Δ_2^Λ, wówczas przestrzeń Λ_φ jest ściśle wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy φ spełnia warunek (+).*

W dowodzie dostateczności ograniczono się do wykazania nierówności $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$ dla dowolnych x i y ze sfery jednostkowej spełniających warunki $x = x^*$, $y = y^*$ i $x \neq y$, skąd na mocy [6, Theorem 3] oraz [14, Theorem 4.8] otrzymano ścisłą wypukłość przestrzeni Λ_φ. Z kolei wykorzystując fakt, że jeżeli funkcja φ nie spełnia warunku (+), wówczas istnieją $t_1, t_2 \in [0, \gamma)$, $t_1 < t_2$, oraz $u, v \in \mathbb{R}_+$, $u < v \leqslant f_1(t_2)$, takie że

$$\varphi\left(t, \frac{u+v}{2}\right) = \frac{1}{2}\{\varphi(t, u) + \varphi(t, v)\}$$

dla m–prawie wszystkich $t \in [t_1, t_2]$, skonstruowano elementy x i y spełniające warunki $x \neq y$ oraz $\|x\| = \|y\| = \|\frac{x+y}{2}\| = 1$, co zakończyło dowód konieczności.

Przechodząc do przypadku ciągowego, analogicznie jak w przypadku funkcyjnym, dla dowolnego elementu x ze sfery jednostkowej $S(\lambda_\varphi)$ dostajemy $x^*(i) \leqslant \alpha_i^1$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, gdzie $\sum_{j=1}^{i} \varphi_j(\alpha_i^1) = 1$ dla dowolnego naturalnego i. Warunek (+) przybiera tutaj następującą postać.

[12] Łatwo pokazać, że w przypadku przestrzeni Orlicza–Lorentza $\Lambda_{\psi,\omega}$ (patrz Uwaga 2) warunek (+) jest równoważny ścisłej wypukłości funkcji ψ na przedziale $[0, \infty)$ (patrz [30, Theorem 3.3]).

Definicja 6c ([H1, ss. 191-192])**.** *Niech $\varphi_1(b^1_\varphi) \geqslant 1$ i niech u_i oznacza kres górny tych $u \in [0, \alpha^1_i]$, dla których funkcja φ_i jest ściśle wypukła na przedziale $[0, u]$, to znaczy*

$$u_i = \sup\left\{u \in [0, \alpha^1_i] \colon \varphi_i\left(\frac{v+w}{2}\right) < \frac{1}{2}\{\varphi_i(v) + \varphi_i(w)\} \text{ dla } v, w \in [0, u],\ v \neq w\right\}.$$

Będziemy mówić, że funkcja Musielaka–Orlicza φ spełnia warunek (+), o ile dla dowolnej pary liczb naturalnych i_1 oraz i_2, $i_1 < i_2$, zachodzą następujące implikacje:
1. *jeżeli $u_{i_1} \geqslant u_{i_2}$, wówczas*

$$\sum_{j=1}^{i_1} \varphi_j(u_{i_1}) + \sum_{j=i_1+1}^{i_2} \varphi_j(u_{i_2}) \geqslant 1,$$

2. *jeżeli $u_{i_1} < u_{i_2}$, wówczas*

$$\sum_{j=1}^{i_1} \varphi_j(v_{i_1}) + \sum_{j=i_1+1}^{i_2} \varphi_j(u_{i_2}) \geqslant 1,$$

gdzie $v_{i_1} = \sup\{v \in [u_{i_2}, \alpha^1_{i_1}] \colon \varphi_{i_1}((s+w)/2) < \frac{1}{2}\{\varphi_{i_1}(s)+\varphi_{i_1}(w)\}$ dla $s, w \in [u_{i_2}, v], s \neq w\}$.

W [H1] udowodniono następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8c ([H1, Theorem 6.6])**.** *Jeżeli φ spełnia warunek δ^λ_2, wówczas przestrzeń λ_φ jest ściśle wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy φ spełnia warunek (+) oraz $\varphi_1(b^1_\varphi) \geqslant 1$.*

Zauważmy, że w przypadku ciągowych przestrzeni Orlicza–Lorentza $\lambda_{\psi,\omega}$ (patrz Uwaga 2) warunek (+) jest równoważny ścisłej wypukłości funkcji ψ na przedziale $[0, u_0]$, gdzie $u_0 = \psi^{-1}(1/(\omega(1) + \omega(2)))$ (patrz [6, Theorem 9]). Jak pokazano w [H1, Theorems 7.1–7.2], ścisła wypukłość funkcji ψ na przedziale $[0, u_0]$ jest warunkiem koniecznym ścisłej wypukłości n–wymiarowych przestrzeni $\lambda^n_{\psi,\omega}$ dla $n \geqslant 3$, nie jest natomiast warunkiem koniecznym w przypadku przestrzeni $\lambda^2_{\psi,\omega}$.

W pracach [H2] i [H4], bez zakładania warunku (L2) dla φ, podano kryteria na punkty ekstremalne i punkty ścisłej wypukłości uogólnionych ciągowych i funkcyjnych przestrzeni Orlicza–Lorentza.

W artykułach [5] i [31] badano punkty ekstremalne odpowiednio przestrzeni Lorentza $\Lambda_{1,\omega}$ i przestrzeni Orlicza–Lorentza $\Lambda_{\psi,\omega}$ przy dodatkowym założeniu, że funkcja wagowa $\omega = \omega(t)$ jest ściśle malejąca, co było istotne dla otrzymania odpowiednich równości dla „nierosnących przestawień" (patrz [5, Lemma 2.1] i [31, Lemma 6]). W naszym przypadku odpowiednikiem powyższego założenia byłoby przyjęcie $p(s, u) > p(t, u)$ w miejsce $p(s, u) \geqslant p(t, u)$ w definicji warunku (L1) (patrz Definicja 1f). Udało się tego uniknąć.

Warunki konieczne i dostateczne na to, by element $x \in S(\Lambda_\varphi)$ był punktem ekstremalnym podano w [H4, Theorem 1]. W dowodzie dostateczności kluczową rolę odegrał lemat ([H4, Lemma 4]), w którym pokazano, że dla dowolnego elementu x spełniającego założenia twierdzenia i dla dowolnych elementów y i z ze sfery jednostkowej takich, że $x = \frac{y+z}{2}$, dostajemy

$$x^* = \frac{1}{2}y^* + \frac{1}{2}z^*. \tag{5}$$

Lemat ten zatem pełni analogiczną rolę jak wyżej wymienione lematy z prac [5] i [31].

Kryteria dla punktów ekstremalnych przestrzeni λ_φ przedstawiono w [H2, Theorem 1]. W przypadku ciągowym w dowodzie dostateczności istotne jest istnienie (wynikające z warunków jaki musi spełniać punkt ekstremalny) podzbioru $N_0 \subseteq \mathbb{N}$ oraz bijekcji $\sigma\colon \mathbb{N} \to N_0$, dla których $x^* = |x| \circ \sigma$. Stąd dla dowolnych y i z, spełniających warunki $\|y\| = \|z\| = 1$ oraz $x = \frac{y+z}{2}$, dostajemy

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x^*(i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x(\sigma(i))) \leqslant \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(y(\sigma(i))) + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(z(\sigma(i)))\right\} \leqslant 1, \tag{6}$$

skąd w konsekwencji

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(y(\sigma(i))) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(z(\sigma(i))) = 1$$

(patrz wzory (2) i (3) na stronie 2712 w [H2]), co oznacza, iż ciągi $(y(\sigma(i)))$ i $(z(\sigma(i)))$ „wydobywają" wartości modularu elementów y i z. Podsumowując możemy stwierdzić, że formuła (6) pełni w dowodzie dostateczności przypadku ciągowego analogiczną rolę jak równość (5) w przypadku funkcyjnym.

Jak nam wiadomo, punkty ścisłej wypukłości w przestrzeniach typu Orlicza–Lorentza były badane po raz pierwszy w pracach [H2] i [H4]. Kryteria na to, by element x sfery jednostkowej był punktem ścisłej wypukłości przestrzeni λ_φ lub Λ_φ zostały przedstawione odpowiednio w [H2, Theorem 2] oraz [H4, Theorem 2]. W dowodach dostateczności obydwu twierdzeń istotną rolę odgrywa nierówność

$$\varrho_\varphi\,(x+y) \leqslant \varrho_\varphi\,(x^*+y^*),$$

która wynika z odpowiednich nierówności dla szeregów ([H1, Proposition 6.4]) bądź całek ([H4, Proposition 1]). Zauważmy, że dowodzone w obydwu przypadkach nierówności są uogólnieniem znanych nierówności dla „nierosnących przestawień". W szczególności nierówność

$$\int_0^t \varphi(s,(x+y)^*(s))ds \leqslant \int_0^t \varphi(s,x^*(s)+y^*(s))ds$$

z [H4, Proposition 1] jest uogólnieniem nierówności (2.17) z [36, s. 65].

W obydwu pracach podano także przykłady punktów ekstremalnych, które nie są punktami ścisłej wypukłości. Ponadto, otrzymane wyniki zastosowano do przestrzeni Orlicza–Lorentza.

3.2.6. Własności niekwadratowościowe

Przypomnijmy, że jednostajna niekwadratowość została zdefiniowana przez Roberta C. Jamesa jako własność geometryczna, która implikuje superrefleksywność (patrz [26, 27]). Ostatnio Jesús García-Falset, Enrique Llorens-Fuster i Eva M. Mazcuñan-Navarro pokazali, że jednostajnie niekwadratowa przestrzeń Banacha ma własność punktu stałego dla odwzorowań nierozszerzających (patrz [16]).

Będziemy mówić, że przestrzeń Banacha X jest niekwadratowa, jeżeli dla dowolnych x i y ze sfery jednostkowej $S(X)$ mamy $\min(\|\frac{x-y}{2}\|_X, \|\frac{x+y}{2}\|_X) < 1$. Z kolei przestrzeń Banacha nazywamy lokalnie jednostajnie niekwadratową, jeżeli dla dowolnego $x \in S(X)$ istnieje $\delta = \delta(x) \in (0,1)$ taka, że $\min(\|\frac{x-y}{2}\|_X, \|\frac{x+y}{2}\|_X) \leqslant 1 - \delta$ dla dowolnego y z kuli jednostkowej $B(X)$. W końcu będziemy mówić, że X jest jednostajnie niekwadratowa, jeżeli istnieje $\delta \in (0,1)$ taka, że $\min(\|\frac{x-y}{2}\|_X, \|\frac{x+y}{2}\|_X) \leqslant 1 - \delta$ dla dowolnych $x, y \in B(X)$.

W pracy [H6] podano kryteria dla niekwadratowości, lokalnej jednostajnej niekwadratowości i jednostajnej niekwadratowości ciągowych przestrzeni Orlicza–Lorentza $\lambda_{\psi,\omega}$, ich n–wymiarowych podprzestrzeni $\lambda^n_{\psi,\omega}$ ($n \geqslant 2$) oraz podprzestrzeni $(\lambda_{\psi,\omega})_a$ elementów porządkowo ciągłych w $\lambda_{\psi,\omega}$. Natomiast w pracy [H8] podano warunki konieczne i dostateczne na to, by funkcyjna przestrzeń Orlicza–Lorentza $\Lambda_{\psi,\omega}$ była niekwadratowa i jednostajnie niekwadratowa, zarówno w przypadku miary skończonej jak i nieskończonej.

Uwaga 3. Zanim zaprezentujemy otrzymane wyniki przedstawimy pomysł, który odgrywa istotną rolę w dowodach dostateczności wszystkich rozważanych własności niekwadratowościowych, zarówno w przypadku funkcyjnym jak i ciągowym. Wykorzystano w nim fakt, że przestrzenie Orlicza–Lorentza są przestrzeniami Calderona–Łozanowskiego (skąd dla dowolnego elementu x z kuli jednostkowej przestrzeni $\Lambda_{\psi,\omega}$ lub $\lambda_{\psi,\omega}$ dostajemy, że złożenie $\psi \circ x$ jest elementem kuli jednostkowej przestrzeni Lorentza, odpowiednio $\Lambda_{1,\omega}$ lub $\lambda_{1,\omega}$) oraz odpowiednie własności monotonicznościowe przestrzeni Lorentza.

W szczególności, w przypadku jednostajnej niekwadratowości (patrz [H6, Theorem 3.5] i [H8, Theorem 2.3]) dla dowolnych elementów x i y ze sfery jednostkowej przestrzeni Orlicza–Lorentza pokazano, że zachodzi przynajmniej jedna z dwóch nierówności

$$\psi \circ \frac{x-y}{2} \leqslant \frac{1}{2}\psi \circ x + \frac{1}{2}\psi \circ y - z_1, \tag{7}$$

$$\psi \circ \frac{x+y}{2} \leqslant \frac{1}{2}\psi \circ x + \frac{1}{2}\psi \circ y - z_2 \tag{8}$$

gdzie $\min(\|z_1\|_\omega, \|z_2\|_\omega) \geqslant \varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$ i ε nie zależy od x i y. Stąd, korzystając z jednostajnej monotoniczności przestrzeni Lorentza (wynika ona z regularności funkcji wagowej, która z kolei jest warunkiem koniecznym jednostajnej niekwadratowości przestrzeni Orlicza–Lorentza) dostajemy, że minimum wartości modularów elementów

$\frac{x-y}{2}$ i $\frac{x+y}{2}$ jest mniejsze lub równe $1-\delta(\varepsilon)$, gdzie $\delta(\varepsilon)$ jest dodatnią stałą z definicji jednostajnej monotoniczności przestrzeni Lorentza zależną tylko od ε. Podsumowując zauważmy, że istota tego pomysłu polega na tym, że z nierówności (7) i (8) od razu dostajemy odpowiednią nierówność dla modularów, bez konieczności wykazywania nierówności dla „nierosnących przestawień".

Na koniec zauważmy, że w przypadku niekwadratowości w miejsce nierówności (7) lub (8) wystarczy wykazać jedną z nierówności

$$\begin{aligned} \psi \circ \frac{x-y}{2} &\lneqq \frac{1}{2}\psi \circ x + \frac{1}{2}\psi \circ y, \\ \psi \circ \frac{x+y}{2} &\lneqq \frac{1}{2}\psi \circ x + \frac{1}{2}\psi \circ y, \end{aligned}$$

i zastosować ścisłą monotoniczność przestrzeni Lorentza.

Teraz przedstawimy wyniki z pracy [H8]. Oznaczając

$$\begin{aligned} a_\psi &= \sup\{u \geqslant 0\colon \psi(u) = 0\}, \\ \delta &= \sup\left\{u \geqslant 0\colon \psi\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{1}{2}\psi\left(u\right)\right\} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \sup\left\{t \geqslant 0\colon \omega \text{ jest stała na przedziale } (0,t)\right\}, \\ \alpha &= \sup\left\{t \geqslant 0\colon \omega\left(t\right) > 0\right\}, \end{aligned}$$

dla niekwadratowości dostajemy następujące twierdzenia.

Twierdzenie 9f ([H8, Theorem 2.1]). *Niech $\gamma = \infty$. Wówczas funkcyjna przestrzeń Orlicza–Lorentza $\Lambda_{\psi,\omega}$ jest niekwadratowa wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_0^\infty \omega\left(t\right) dt = \infty$, $\psi \in \Delta_2(\mathbb{R})$ i $\int_0^{\gamma_0/2} \psi(\delta)\omega(t)dt < 1$.*

Twierdzenie 10f ([H8, Theorem 2.2]). *Jeżeli $\gamma < \infty$, wówczas funkcyjna przestrzeń Orlicza–Lorentza $\Lambda_{\psi,\omega}$ jest niekwadratowa wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\gamma}{2} < \alpha \leqslant \gamma$, $\psi \in \Delta_2(\infty)$ i $\int_0^{\gamma_0/2} \psi(\delta)\omega(t)dt < 1$.*

W dowodach obydwu twierdzeń poza wykorzystaniem metody opisanej w Uwadze 3 zastosowano zmodyfikowany schemat dowodu Twierdzenia 10c. Specyfika przypadku funkcyjnego wymagała jednak stosowania innych technik. Szczególnie istotne było wykorzystanie zbiorów $e_t(x)$ (zdefiniowanych w [36, s. 64]) oraz własności modularu przedstawionej w [H8, Remark 1.1].

Oznaczając przez $\bar{\psi}$ funkcję dopełniającą w sensie Younga do ψ dostajemy.

Twierdzenie 11f ([H8, Theorem 2.3]). *Jeżeli $\gamma = \infty$, wtedy funkcyjna przestrzeń Orlicza–Lorentza $\Lambda_{\psi,\omega}$ jest jednostajnie niekwadratowa wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi \in \Delta_2(\mathbb{R})$, $\bar{\psi} \in \Delta_2(\mathbb{R})$ i funkcja wagowa ω jest regularna.*

Twierdzenie 12f. *Niech teraz* $\gamma < \infty$.

(i) [H8, Theorem 2.4] *Jeżeli* $\alpha = \gamma$, *wówczas funkcyjna przestrzeń Orlicza–Lorentza* $\Lambda_{\psi,\omega}$ *jest jednostajnie niekwadratowa wtedy i tylko wtedy, gdy* $\psi \in \Delta_2(\infty)$, $\bar{\psi} \in \Delta_2(\infty)$, *funkcja wagowa* ω *jest regularna i* $\int_0^{\gamma_0/2} \psi(\delta)\omega(t)dt < 1$.

(ii) [H8, Theorem 2.5] *Jeżeli* $0 < \alpha < \gamma$ *i* $0 \leqslant a_\psi = \delta$, *wówczas funkcyjna przestrzeń Orlicza–Lorentza* $\Lambda_{\psi,\omega}$ *jest jednostajnie niekwadratowa wtedy i tylko wtedy, gdy* $\psi \in \Delta_2(\infty)$, $\bar{\psi} \in \Delta_2(\infty)$, *funkcja wagowa* ω *jest regularna i* $\alpha \in (\frac{\gamma}{2}, \gamma)$.

Ponieważ warunek $\bar{\psi} \in \Delta_2(\mathbb{R})$ oznacza istnienie $\eta \in (0,1)$ takiej, że $\psi(\frac{u}{2}) \leqslant \frac{1-\eta}{2}\psi(u)$ dla dowolnego $u > 0$ (patrz [9]), w dowodzie dostateczności Twierdzenia 11f wystarczy zastosować metodę opisaną w Uwadze 3. Z kolei warunek $\bar{\psi} \in \Delta_2(\infty)$ oznacza, iż dla dowolnego $u_\delta > \delta$ istnieje $\eta = \eta(u_\delta) \in (0,1)$ taka, że nierówność $\psi\left(\frac{u}{2}\right) \leqslant \frac{1-\eta}{2}\psi(u)$ zachodzi dla dowolnego $u \geqslant u_\delta$. Zatem w Twierdzeniu 12f(i) ($\alpha = \gamma < \infty$) można powtórzyć dowód dostateczności z Twierdzenia 11f, o ile $\int_0^\gamma \psi(\delta)\omega(t)dt < 1$. W przeciwnym przypadku, to znaczy gdy $\int_0^\gamma \psi(\delta)\omega(t)dt \geqslant 1$, w dowodzie dostateczności należało rozpatrzyć kilka podprzypadków. W sytuacji gdy $0 < \alpha < \gamma < \infty$ rozpatrzono tylko przypadek $0 \leqslant a_\varphi = \delta$ (Twierdzenie 12f(ii)), w dowodzie korzystając z wyników Twierdzenia 12f(i).

W pracy [H6] najpierw podano kryteria dla n–wymiarowej przestrzeni $\lambda^n_{\psi,\omega}$. Przyjmując

$$b_\psi = \sup\{u \geqslant 0\colon \psi(u) < \infty\}$$

i

$$\mathrm{m} = \sup\{i \geqslant 1\colon \omega(i) = \omega(1)\},$$

otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10c ([H6, Theorem 3.1]). *Przestrzeń* $\lambda^n_{\psi,\omega}$ *jest niekwadratowa (równoważnie jednostajnie niekwadratowa) wtedy i tylko wtedy, gdy* $\psi(b_\psi) > \frac{1}{\omega(1)+\omega(2)}$, $\omega([n/2]+1) > 0$ *oraz* $\sum_{i=1}^{[\mathrm{m}/2]} \psi(\delta)\omega(i) < 1$.

Jak już zauważyliśmy, dowód tego twierdzenia powstał wcześniej niż dowody Twierdzeń 9f i 10f. Podstawowa różnica polegała na tym, że w dowodzie Twierdzenia 10c wykorzystano fakt, iż dla dowolnego elementu x należącego do $\lambda^n_{\psi,\omega}$ lub $\lambda^n_{1,\omega}$ istnieje permutacja σ, dla której zachodzi równość $x^* = |x| \circ \sigma$.

Następnie, stosując metodę opisaną w Uwadze 3, podano kryteria dla niekwadratowości, lokalnej jednostajnej niekwadratowości i jednostajnej niekwadratowości przestrzeni $\lambda_{\psi,\omega}$.

Twierdzenie 9c ([H6, Theorem 3.2(i)]). *Ciągowa przestrzeń Orlicza–Lorentza* $\lambda_{\psi,\omega}$ *jest niekwadratowa wtedy i tylko wtedy, gdy* $\psi(b_\psi) > \frac{1}{\omega(1)+\omega(2)}$, $\psi \in \delta_2$, $\sum_{i=1}^\infty \omega(i) = \infty$ *i* $\sum_{i=1}^{[\mathrm{m}/2]} \psi(\delta)\omega(i) < 1$.

Twierdzenie 13c ([H6, Theorem 3.3]). *Ciągowa przestrzeń Orlicza–Lorentza $\lambda_{\psi,\omega}$ jest lokalnie jednostajnie niekwadratowa wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi(b_\psi) > \frac{1}{\omega(1)+\omega(2)}$, $\psi \in \delta_2$, $\sum_{i=1}^{\infty} \omega(i) = \infty$ i $\delta = 0$, to znaczy $\psi(\frac{u}{2}) < \frac{1}{2}\psi(u)$ dla dowolnego $u > 0$.*

Twierdzenie 11c ([H6, Theorem 3.5]). *Ciągowa przestrzeń Orlicza–Lorentza $\lambda_{\psi,\omega}$ jest jednostajnie niekwadratowa wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi(b_\psi) > \frac{1}{\omega(1)+\omega(2)}$, $\psi \in \delta_2$, $\bar{\psi} \in \delta_2$ i ciąg wagowy ω jest regularny.*

W pracy [H6] rozważano również podprzestrzeń $(\lambda_{\psi,\omega})_a$ elementów porządkowo ciągłych w $(\lambda_{\psi,\omega})$ pokazując między innymi, że $(\lambda_{\psi,\omega})_a$ jest jednostajnie niekwadratowa wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń λ_φ jest jednostajnie niekwadratowa (patrz [H6, Theorem 3.5], w szczególności z warunku $\psi \in \delta_2$ mamy wówczas $(\lambda_{\psi,\omega})_a = \lambda_{\psi,\omega}$).

W pracach [H5, Theorems 4.1–4.2] i [H7, Theorems 5.1–5.3] uogólniono wyniki dotyczące niekwadratowości na uogólnione przestrzenie Orlicza–Lorentza. Ponieważ nie można było korzystać z metody opisanej w Uwadze 3, odpowiednie nierówności należało wykazać bezpośrednio dla „nierosnących przestawień”. W szczególności w przypadku funkcyjnym wykorzystano fakt, że modular ϱ_φ jest ortogonalnie subaddytywny (patrz [H5, Proposition 2.1]). W przypadku ciągowym otrzymane rezultaty zastosowano do dwu-wagowych przestrzeni Orlicza–Lorentza i ewentualnych symetryzacji przestrzeni Nakano (patrz [H7, Corollaries 5.2–5.3]). Analogiczne wnioski dla przypadku funkcyjnego można wyprowadzić z [H5, Theorems 4.1–4.2].

4. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

4.1. Lista publikacji niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego

[D1] Paweł Foralewski, Henryk Hudzik, *Some basic properties of generalized Calderón–Lozanovskiĭ spaces*, Collectanea Mathematica **48** (1997), no. 4–6, 523–538. Fourth International Conference on Function Spaces (Zielona Góra, 1995).

[D2] Paweł Foralewski, *On some geometric properties of generalized Calderón–Lozanovskiĭ spaces*, Acta Mathematica Hungarica **80** (1998), no. 1–2, 55–66.

[D3] Paweł Foralewski, Henryk Hudzik, *On some geometrical and topological properties of generalized Calderón–Lozanovskiĭ sequence spaces*, Houston Journal of Mathematics **25** (1999), no. 3, 523–542.

[D4] Paweł Foralewski, Paweł Kolwicz, *Local uniform rotundity in Calderón–Lozanovskiĭ spaces*, Journal of Convex Analysis **14** (2007), no. 2, 395–412.

[D5] Paweł Foralewski, Henryk Hudzik, Alicja Szymaszkiewicz, *Local rotundity structure of Cesàro–Orlicz sequence spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **345** (2008), no. 1, 410–419.

[D6] Liu Xin Bo, Yun An Cui, Paweł Foralewski, Henryk Hudzik, *Local uniform rotundity and weak local uniform rotundity of Musielak–Orlicz sequence spaces endowed with the Orlicz norm*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **69** (2008), no. 5–6, 1559–1569.

[D7] Paweł Foralewski, Henryk Hudzik, Ryszard Płuciennik, *Orlicz spaces without extreme points*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **361** (2010), no. 2, 506–519.

[D8] Paweł Foralewski, Henryk Hudzik, Alicja Szymaszkiewicz, *Some remarks on Cesàro–Orlicz sequence spaces*, Mathematical Inequalities & Applications **13** (2010), no. 2, 363–386.

[D9] Paweł Foralewski, Henryk Hudzik, Radosław Kaczmarek, Miroslav Krbec, *Moduli and characteristics of monotonicity in some Banach lattices*, Fixed Point Theory and Applications (2010), Article ID 852346, doi:10.1155//2010//852346, 22 strony.

[D10] Paweł Foralewski, *Some remarks on the geometry of Lorentz spaces $\Lambda_{1,w}$*, Indagationes Mathematicae N. S. **23** (2012), no. 3, 361–376.

[D11] Paweł Foralewski, Henryk Hudzik, Radosław Kaczmarek, Miroslav Krbec, Marek Wójtowicz, *On the moduli and characteristic of monotonicity in Orlicz–Lorentz function spaces*, Journal of Convex Analysis **20** (2013), no. 4, w druku.

4.2. Krótkie omówienie wyników publikacji niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego

Prace [D1, D2, D3] zawierają wyniki mojej rozprawy doktorskiej. Zostały w nich wprowadzone uogólnione (funkcyjne i ciągowe) przestrzenie Calderona–Łozanowskiego E_φ generowane przez przestrzeń Köthego E oraz funkcję Musielaka–Orlicza φ. Przypomnijmy, że jeżeli $E = L^1$, wówczas uogólniona przestrzeń Calderona–Łozanowskiego jest przestrzenią Musielaka–Orlicza. Na początku wprowadzono najsłabszy warunek Δ_2^E, którego spełnianie przez funkcję φ, razem z porządkową ciągłością przestrzeni E, gwarantuje porządkową ciągłość przestrzeni E_φ. Spełnianie przez funkcję φ warunku Δ_2^E okazało się także konieczne dla wykazania pewnych relacji pomiędzy normą i modularem, które z kolei wykorzystywano w dowodach dostateczności badanych własności monotonicznościowych i wypukłościowych.

W artykule [D4], w celu uzyskania głównego wyniku jakim było znalezienie warunków koniecznych i dostatecznych na to, by przestrzeń Calderona–Łozanowskiego była lokalnie jednostajnie wypukła, najpierw pokazano kilka faktów dotyczących dolnej i górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności. Otrzymane wyniki, dotyczące zarówno własności monotonicznościowych jak i lokalnej jednostajnej wypukłości, zastosowano do przestrzeni Lorentza i Orlicza–Lorentza, otrzymując w przypadku własności monotonicznościowych częściowo nowe wyniki a w przypadku lokalnej jednostajnej wypukłości prostsze dowody znanych twierdzeń.

W publikacjach [D5] i [D8] kontynuowano badania ciągowych przestrzeni Cesaro–Orlicza rozpoczęte w pracach [11] i [46]. Główne wyniki dotyczyły lokalnych ([D5]) i globalnych ([D8]) własności wypukłościowych ciągowych przestrzeni Cesaro–Orlicza oraz ich podprzestrzeni. Między innymi zakładając, że funkcja Orlicza spełnia warunek Δ_2 w zerze, podano kryteria na lokalną jednostajną wypukłość ciągowych przestrzeni Cesaro–Orlicza. Jak pokazano w [46, Theorem 1], przy tym samym założeniu przestrzeń ta nie jest jednostajnie niekwadratowa a tym samym nie jest jednostajnie wypukła. Na koniec zauważmy, iż warunek Δ_2 w zerze jest konieczny dla zachodzenia większości własności geometrycznych ciągowych przestrzeni Cesaro–Orlicza, kiedy tylko dolny indeks Matuszewskiej–Orlicza jest większy od 1 (patrz [37, Theorem 5]).

W artykule [D6] podano kryteria na to, by ciągowa przestrzeń Musielaka–Orlicza z normą Orlicza oraz jej podprzestrzeń elementów porządkowo ciągłych były lokalnie jednostajnie wypukłe lub słabo lokalnie jednostajnie wypukłe.

Z kolei w pracy [D7] scharakteryzowano te przestrzenie Orlicza oraz te podprzestrzenie elementów porządkowo ciągłych przestrzeni Orlicza, których kule jednostkowe nie mają punktów ekstremalnych. Otrzymano wyniki dla wszystkich możliwych przypaków: normy Luxemburga i Orlicza, przestrzenie funkcyjne i ciągowe. Jako szczególne przypadki przestrzeni Orlicza lub ich podprzestrzeni elementów porządkowo ciągłych, których kule jednostkowe nie mają punktów ekstremalnych, otrzymano odpowiednio L^1 i c_0. Znaleziono także inny przykład przestrzeni Banacha, której kula jednostkowa nie ma punktów ekstremalnych.

Prace [D9] i [D11] są poświęcone charakterystyce monotoniczności $\varepsilon_{0,m}(X)$ kraty Banacha X. Przypomnijmy, że charakterystykę monotoniczności definiujemy wzorem

$$\varepsilon_{0,m}(X) = \sup\{\varepsilon \in [0,1] \colon \delta_{m,X}(\varepsilon) = 0\} = \inf\{\varepsilon \in (0,1] \colon \delta_{m,X}(\varepsilon) > 0\},$$

gdzie

$$\delta_{m,X}(\varepsilon) = \inf\{1 - \|x-y\|_X : x, y \in X_+, y \leqslant x, \|x\|_X = 1, \|y\|_X \geqslant \varepsilon\}.$$

Jak pokazano w [3], jeżeli $\varepsilon_{0,m}(X) < 1$ i X jest słabo ortogonalna, wówczas ma ona słabą własność punktu stałego. W [D9] pokazano, że

$$\varepsilon_{0,m}(X) = 1 - \lim_{\varepsilon\to 1^-} \delta_{m,X}(\varepsilon) \geqslant 1 - \delta_{m,X}(1), \tag{9}$$

znajdując jednocześnie przykłady krat Banacha, dla których nierówność w formule (9) jest ostra. W tej samej pracy dla przestrzeni Köthego E wprowadzono nowy moduł i odpowiadającą mu charakterystykę monotoniczności

$$\widehat{\delta}_{m,E}(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \|x - x\chi_A\|_E : x \in E_+, \|x\|_E = 1, A \in \Sigma, \|x\chi_A\|_E \geqslant \varepsilon\right\},$$

$$\widehat{\varepsilon}_{0,m}(E) = \sup\left\{\varepsilon \in [0,1] \colon \widehat{\delta}_{m,E}(\varepsilon) = 0\right\} = \inf\left\{\varepsilon \in (0,1] \colon \widehat{\delta}_{m,E}(\varepsilon) > 0\right\},$$

dla których zachodzi równość

(10)
$$\varepsilon_{0,m}(E) = \widehat{\varepsilon}_{0,m}(E) = \lim_{\varepsilon \to 1^-} \sup \left\{ \|x\chi_{A'}\|_E : x \in E_+, \|x\|_E = 1, A \in \Sigma, \|x\chi_A\|_E \geqslant \varepsilon \right\}.$$

Przy wykorzystaniu wzorów (9) i (10) wyliczono charakterystykę monotoniczności zarówno w funkcyjnej jak i ciągowej przestrzeni Orlicza, dopuszczając w rozważaniach także zdegenerowane funkcje Orlicza.

Wzór (10) był także kluczowy dla wyliczenia charakterystyki monotoniczności w funkcyjnych przestrzeniach Orlicza–Lorentza, czemu poświęcona jest praca [D11]. Także tutaj poprzez dopuszczenie zdegenerowanych funkcji Orlicza i zdegenerowanych funkcji wagowych rozwiązano problem w pełnej ogólności.

Jak wynika z tytułu, w pracy [D10] podano kilka uwag dotyczących własności geometrycznych klasycznych przestrzeni Lorentza $\Lambda_{1,w}$. W szczególności, uogólniono wyniki z prac [25] i [5], podając kryteria odpowiednio na własność Kadeca–Klee ze względu na lokalną zbieżność według miary w przypadku gdy $\gamma = \infty$ oraz na punkty ekstremalne kuli jednostkowej bez założenia, że funkcja wagowa w jest ściśle malejąca. Ponadto, znaleziono warunki konieczne i dostateczne na niekwadratowość przestrzeni $\Lambda_{1,w}$.

4.3. Udział w projektach badawczych

— wykonawca w grancie KBN nr 1 P03A 011 27, *Geometria i operatory w pewnych klasach przestrzeni Banacha*, kierownik - prof. dr hab. Henryk Hudzik, 2004–2006.
— wykonawca w grancie N N201 362236, *Geometria przestrzeni Banacha i jej zastosowania*, kierownik - prof. dr hab. Henryk Hudzik, 2009–2012.

4.4. Otrzymane nagrody

— 1998 – nagroda indywidualna Rektora Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, II stopnia,
— 2009 – nagroda indywidualna Rektora Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, III stopnia,
— 2012 – nagroda naukowa Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

4.5. Konferencje, na których wygłoszono referaty

— Workshop on Fixed Point Theory, Kazimierz Dolny, 23–28 czerwiec 1997, komunikat,
— Function Spaces V, Poznań, 28 sierpień – 2 wrzesień 1998, komunikat,
— V Zielonogórskie Konfrontacje Matematyczne, Zielona Góra, 14–17 wrzesień 1998, komunikat,

— Functional Analysis and Applications 98, Gargnano (Włochy), 12–17 październik 1998, komunikat,
— Function Spaces VIII, Będlewo, 3–7 lipiec 2006, komunikat,
— The 8th International Conference on Fixed Point Theory and its Applications, Chiang Mai (Tajlandia), 16–22 lipiec 2007, komunikat,
— The 7th International Conference on Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis, Helsinki (Finlandia), 22–29 sierpień 2008, komunikat,
— Function Spaces IX, Kraków, 6–11 lipiec 2009, komunikat,
— The 9th International Conference on Fixed Point Theory and its Applications, Changhua (Tajwan), 16–22 lipiec 2009, komunikat,
— The Józef Marcinkiewicz Centenary Conference, Poznań, 28 czerwiec – 2 lipiec 2010, komunikat,
— International Conference on Functional Analysis and its Applications, Harbin (Chiny), 25–30 lipiec 2010, wykład plenarny na zaproszenie,
— International Conference on Analysis and its Applications, Aligarh (Indie), 19–22 listopad 2011, wykład sekcyjny na zaproszenie.

Ponadto w latach 2005 oraz 2009–2011 (każdego roku 1 tydzień) w ramach współpracy naukowej z Miroslavem Krbecem przebywałem w Instytucie Matematyki Czeskiej Akademii Nauk, dwa razy wygłaszając odczyt.

4.6. Wskaźniki służące do oceny dorobku naukowego

Sumaryczny *Impact Factor* publikacji naukowych według bazy *Journal Citation Reports*, zgodnie z rokiem opublikowania (ponieważ nie są znane wartości *Impact Factor* z roku 2012, dla publikacji z lat 2012 i 2013 zastosowano wartości *Impact Factor* z roku 2011): **15,722**.

Liczba cytowań publikacji według bazy *Web of Science*:
wszystkie cytowania: **50**,
cytowania bez autocytowań: **25**.

Indeks Hirscha opublikowanych publikacji według bazy *Web of Science*: **5**.

5. Literatura

[1] Sergei V. Astashkin, Fedor A. Sukochev, Chin P. Wong, *Distributionally concave symmetric spaces and uniqueness of symmetric structure*, Advances in Mathematics **232** (2013), no. 1, 399–431.
[2] Colin Bennett, Robert Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, Inc., New York, 1988.

[3] Anna Betiuk-Pilarska, Stanisław Prus, *Banach lattices which are order uniformly noncreasy*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **342** (2008), no. 2, 1271–1279.

[4] Garrett Birkhoff, *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1967.

[5] Neal L. Carothers, Stephen J. Dilworth, David A. Trautman, *On the geometry of the unit spheres of the Lorentz spaces $L_{w,1}$*, Glasgow Mathematical Journal **34** (1989), no. 1, 21–25.

[6] Joan Cerdà, Henryk Hudzik, Anna Kamińska, Mieczysław Mastyło, *Geometric properties of symmetric spaces with applications to Orlicz–Lorentz spaces*, Positivity **2** (1998), no. 4, 311–337.

[7] Vladimir I. Chilin, Peter G. Dodds, Alexander A. Sedaev, Fedor A. Sukochev, *Characterizations of Kadec–Klee properties in symmetric spaces of measurable functions*, Transactions of the American Mathematical Society **348** (1996), no. 12, 4895–4918.

[8] Shutao Chen, *Geometry of Orlicz Spaces*, Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne), vol. 356, Polish Academy of Sciences, Warsaw, 1996.

[9] Shutao Chen, Henryk Hudzik, *On some convexities of Orlicz and Orlicz–Bochner spaces*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae **29** (1988), no. 1, 13–29.

[10] Yunan Cui, Henryk Hudzik, Chenghui Meng, *On some local geometry of Orlicz sequence spaces equipped with the Luxemburg norm*, Acta Mathematica Hungarica **80** (1998), no. 1–2, 143–154.

[11] Yunan Cui, Henryk Hudzik, Narin Petrot, Suthep Suantai, Alicja Szymaszkiewicz, *Basic topological and geometric properties of Cesàro–Orlicz spaces*, Proceedings of the Indian Academy of Sciences **115** (2005), no. 4, 461–476.

[12] Lars Diening, Petteri Harjulehto, Peter Hästö, Michael Růžička, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2017, Springer, Heidelberg–Dordrecht–London–New York, 2011.

[13] Joseph Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 92, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo, 1984.

[14] Peter G. Dodds, Theresa K. Dodds, Alexander A. Sedaev, Fedor A. Sukochev, *Local uniform convexity and Kadec–Klee type properties in K-interpolation spaces II*, Journal of Function Spaces and Applications **2** (2004), no. 3, 323–356.

[15] Tomás Domínguez, Henryk Hudzik, Genaro López, Mieczysław Mastyło, Brailey Sims, *Complete characterizations of Kadec–Klee properties in Orlicz spaces*, Houston Journal of Mathematics **29** (2003), no. 4, 1027–1044.

[16] Jesús García-Falset, Enrique Llorens-Fuster, Eva M. Mazcuñan-Navarro, *Uniformly nonsquare Banach spaces have the fixed point property for nonexpansive mappings*, Journal of Functional Analysis **233** (2006), no. 2, 494–514.

[17] Israel Halperin, *Function spaces*, Canadian Journal of Mathematics **5** (1953), no. 3, 273–288.

[18] Israel Halperin, *Uniform convexity in function spaces*, Duke Mathematical Journal **21** (1954), no. 2, 195–204.

[19] Henryk Hudzik, *Strict convexity of Musielak–Orlicz spaces with Luxemburg's norm*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics **34** (1981), no. 5–6, 235–247.

[20] Henryk Hudzik, *Banach lattices with order isometric copies of l^∞*, Indagationes Mathematicae N. S. **9** (1998), no. 4, 521–527.

[21] Henryk Hudzik, Anna Kamińska, *Monotonicity properties of Lorentz spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society **123** (1995), no. 9, 2715–2721.

[22] Henryk Hudzik, Anna Kamińska, Mieczysław Mastyło, *Geometric properties of some Calderón–Lozanovskiĭ space and Orlicz–Lorentz spaces*, Houston Journal of Mathematics **22** (1996), no. 3, 639–663.

[23] Henryk Hudzik, Anna Kamińska, Mieczysław Mastyło, *Monotonicity and rotundity properties in Banach lattices*, The Rocky Mountain Journal of Mathematics **30** (2000), no. 3, 933-950.

[24] Henryk Hudzik, Wiesław Kurc, *Monotonicity properties of Musielak–Orlicz spaces and dominated best approximation in Banach lattices*, Journal of Approximation Theory **95** (1998), no. 3, 353–368.

[25] Henryk Hudzik, Mieczysław Mastyło, *Strongly extreme points in Köthe-Bochner Spaces*, The Rocky Mountain Journal of Mathematics **23** (1993), no. 3, 899–909.

[26] Robert C. James, *Uniformly non-square Banach spaces*, Annals of Mathematics **80** (1964), no. 3, 542–550.

[27] Robert C. James, *Super-reflexive spaces with bases*, Pacific Journal of Mathematics **41** (1972), no. 3, 409–419.

[28] William B. Johnson, Joram Lindenstrauss (eds.), *Handbook of the geometry of Banach Spaces*, Vol. 1 and 2, North-Holland, Amsterdam, 2001 and 2003.

[29] Anna Kamińska, *Uniform rotundity of Musielak–Orlicz sequence spaces*, Journal of Approximation Theory **47** (1986), no. 4, 302–322.

[30] Anna Kamińska, *Some remarks on Orlicz–Lorentz spaces*, Mathematische Nachrichten **147** (1990), 29–38.

[31] Anna Kamińska, *Extreme points in Orlicz–Lorentz spaces*, Archiv der Mathematik **55** (1990), no. 2, 173–180.

[32] Anna Kamińska, *Uniform convexity of generalized Lorentz spaces*, Archiv der Mathematik **56** (1991), no. 2, 181–188.

[33] Anna Kamińska, Anca M. Parrish, *Convexity and concavity constants in Lorentz and Marcinkiewicz spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **343** (2008), no. 1, 337–351.

[34] Anna Kamińska, Yves Raynaud, *Isomorphic copies in the lattice E and its symmetrization $E^{(*)}$ with applications to Orlicz–Lorentz spaces*, Journal of Functional Analysis **257** (2009), no. 1, 271–331.

[35] Leonid V. Kantorovich, Gleb P. Akilov, *Functional Analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1982. Tłumaczenie w języku angielskim z wydania rosyjskiego.

[36] Selim G. Krein, Jurii I. Petunin, Evgenij M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 54, American Mathematical Society, Providence, 1982.

[37] Damian Kubiak, *A note on Cesàro–Orlicz sequence spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **349** (2009), no. 1, 291-296.

[38] Fabian E. Levis, Hector H. Cuenya, *Gateaux differentiability in Orlicz–Lorentz spaces and applications*, Mathematische Nachrichten **280** (2007), no. 11, 1282-1296.

[39] Joram Lindenstrauss, Lior Tzafriri, *Classical Banach Spaces II, Function Spaces*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1979.

[40] George G. Lorentz, *Some new functional space*, Annals of Mathematics **51** (1950), no. 1, 37–55.

[41] George G. Lorentz, *On the theory of space* Λ, Pacific Journal of Mathematics **1** (1951), no. 3, 411–429.

[42] George G. Lorentz, *An inequality for rearrangements*, The American Mathematical Monthly **60** (1953), no. 3, 176–179.

[43] Wilhelmus A. J. Luxemburg, *Banach Function Spaces*, Delft, 1955, Thesis.

[44] Lech Maligranda, *Indices and Interpolation*, Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne), vol. 234, Polish Academy of Sciences, Warsaw, 1985.

[45] Lech Maligranda, *Orlicz Spaces and Interpolation*, Seminars in Mathematics, vol. 5, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brazil, 1989.

[46] Lech Maligranda, Narin Petrot, Suthep Suantai, *On the James constant and B-convexity of Cesàro and Cesàro–Orlicz sequence spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **326** (2007), no. 1, 312–331.

[47] Dorina Mitrea, Irina Mitrea, Marius Mitrea, Elia Ziadé, *Abstract capacitary estimates and the completeness and separability of certain classes of non-locally convex topological vector spaces*, Journal of Functional Analysis **262** (2012), no. 11, 4766-4830.

[48] Stephen J. Montgomery-Smith, *Comparison of Orlicz–Lorentz spaces*, Studia Mathematica **103** (1992), no. 2, 161–189.

[49] Stephen J. Montgomery-Smith, *Boyd indices of Orlicz–Lorentz spaces*, in Function Spaces, The Second Conference (Edwardsville, IL, 1994) (Krzysztof Jarosz, ed.), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 172, Marcel Dekker, New York 1995, pp. 321–334.

[50] Julian Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1034, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo, 1983.

[51] Marek Nawrocki, *Topologie Mackey'a pewnych F-przestrzeni*, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, 1984. Praca doktorska.

[52] Stanisław Prus, *Geometrical background of metric fixed point theory*, in Handbook of Metric Fixed Point Theory (William A. Kirk, Brailey Sims, eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London 2001, pp. 93–132.

[53] Fedor A. Sukochev, Dmitriy Zanin, *Khinchin inequality and Banach–Saks type properties in rearrangement–invariant spaces*, Studia Mathematica **191** (2009), no. 2, 101–112.

P. Foralewski