Autoreferat

Porównanie losowych grafów przecięć z losowym grafem Erdősa-Rényiego

Katarzyna Rybarczyk-Krzywdzińska

Poznań 2017

Imię i nazwisko: Katarzyna Rybarczyk-Krzywdzińska

Posiadane dyplomy, stopnie naukowe:

doktor nauk matematycznych, 2010, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
tytuł rozprawy doktorskiej: „Losowe grafy przecięć. Modelowanie sieci i ich analiza."
promotor: prof. J. Jaworski

magister inżynier architekt, 2005, Politechnika Poznańska,
tytuł pracy magisterskiej: „Szkoła w małym mieście";
promotorzy: prof. H. Zaniewska i dr S. Sipiński

magister matematyki, 2005, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu,
tytuł pracy magisterskiej: „O pewnych zastosowaniach hipergrafów losowych"
promotor: prof. J. Jaworski

Informacje o zatrudnieniu w jednostkach naukowych:
od 2010 r.: adiunkt na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. A Mickiewicza w Poznaniu

Spis treści

Rozdział 1

Osiągnięcie naukowe

Tytuł osiągnięcia naukowego

„Porównanie losowych grafów przecięć z losowym grafem Erdősa–Rényiego"

Lista publikacji wchodzących w skład osiągnięcia naukowego

[H1] K. Rybarczyk. Equivalence of a random intersection graph and G(n,p). *Random Structures & Algorithms*, 38(1-2):205–234, 2011.

[H2] K. Rybarczyk. Sharp threshold functions for random intersection graphs via a coupling method. *Electronic Journal of Combinatorics*, 18(1):P36 (pp. 12), 2011.

[H3] K. Rybarczyk. Constructions of independent sets in random intersection graphs. *Theoretical Computer Science*, 524:103–125, 2014.

[H4] V. Kurauskas, K. Rybarczyk. On the chromatic index of random uniform hypergraphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 29(1):541–558, 2015.

[H5] K. Rybarczyk. The coupling method for inhomogeneous random intersection graphs. *Electronic Journal of Combinatorics*, 24(2):P2.10 (pp. 45), 2017.

[H6] K. Rybarczyk, D. Stark. Poisson approximation of counts of induced subgraphs in random intersection graphs. *Discrete Mathematics*, 340 (9):2183–2193, 2017.

Rozdział 2

Cel naukowy i wyniki

2.1 Wstęp

Głównym celem prezentowanego osiągnięcia naukowego jest analiza asymptotycznych własności losowych grafów przecięć pod kątem porównania ich z klasycznym modelem grafu losowego z niezależnie wygenerowanymi krawędziami.

Badania te wpisują się w jeden z nurtów teorii grafów losowych, którym jest poszukiwanie modelu grafu o własnościach obserwowanych w sieciach rzeczywistych. W ramach tego kierunku badań zostało już zaproponowanych i zbadanych wiele interesujących modeli grafów losowych. W tym opracowaniu będziemy zajmowali się jednym z takich modeli, tak zwanym losowym grafem przecięć. Model ten znajduje zastosowania w wielu działach informatyki teoretycznej. Jako przykłady możemy tu podać: problem projektowania bramek w układach VLSI [31], projektowanie sieci sensorowych z losową predystrybucją kluczy (np. [40]), modelowanie sieci złożonych takich jak sieć internetowa lub sieć stron WWW (np. [8, 9, 20]).

Naturalnym pytaniem jakie pojawia się, gdy wprowadzony zostaje nowy model grafu losowego jest w jakim stopniu różni się on od dotychczas analizowanych modeli. To pytanie jest jedną z głównych motywacji do badań stanowiących prezentowane osiągnięcie naukowe.

W losowym grafie przecięć mamy zbiór wierzchołków $\mathcal{V}$, $|\mathcal{V}| = n$, oraz pomocniczy zbiór atrybutów $\mathcal{W}$, $|\mathcal{W}| = m = m(n)$. Każdemu wierzchołkowi $v \in \mathcal{V}$ niezależnie zostaje przypisany zbiór jego atrybutów $\mathcal{W}(v) \subseteq \mathcal{W}$ zgodnie z ustalonym rozkładem prawdopodobieństwa. Wierzchołki v_1 i v_2 są połączone krawędzią w losowym grafie przecięć wtedy i tylko wtedy $\mathcal{W}(v_1) \cap \mathcal{W}(v_2) \neq \emptyset$. W dalszej części, gdy zajdzie $w \in \mathcal{W}(v)$, będziemy mówili, że *v wybrał w* lub, że *w został wybrany przez v*. W dodatku, dla $w \in \mathcal{W}$, przez $\mathcal{V}(w)$ oznaczymy zbiór tych wierzchołków losowego grafu przecięć, które wybrały atrybut w, tzn. $\mathcal{V}(w) = \{v \in \mathcal{V} : w \in \mathcal{W}(v)\}$. Szczególny przypadek opisanego powyżej modelu losowego grafu przecięć został wprowadzony przez Karońskiego, Scheinermana i Singer-Cohen w [31], a później model ten został uogólniony przez Godehardta i Jaworskiego w [29].

Większość wyników stanowiących osiągnięcie naukowe ([H1, H2, H3, H5, H6]) dotyczy losowego grafu przecięć $\mathcal{G}(n, m, p)$ wprowadzonego w [31]. Ten model nazywamy *dwumianowym losowym grafem przecięć*. W $\mathcal{G}(n, m, p)$ każdy wierzchołek v wybiera atrybut w z prawdopodobieństwem p, $p \in [0, 1]$, niezależnie dla każdego $v \in \mathcal{V}$ i $w \in \mathcal{W}$, tzn. $\Pr\{w \in \mathcal{W}(v)\} = p$. Rozważamy także inny model losowego grafu przecięć – *jednolity losowy graf przecięć* $\mathcal{G}_u(n, m, d)$ analizowany w [H3] i [H4]. W tym modelu każdy wierzchołek niezależnie wybiera zbiór atrybutów $\mathcal{W}(v)$ w sposób jednostajny spośród wszystkich d–elementowych podzbiorów zbioru $\mathcal{W}$. Ostatnim z modeli wspomnianych w tym opracowaniu jest rozpatrywany w [H5] losowy graf przecięć $\mathcal{G}_I(n, m, \overline{p})$. W $\mathcal{G}_I(n, m, \overline{p})$ z zadanym zbiorem atrybutów $\mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_{m(n)}\}$ i wektorem

$\overline{p} = \overline{p}(n) = (p_1, \ldots, p_{m(n)})$ każdemu wierzchołkowi $v \in \mathcal{V}$ przyporządkowujemy jego zbiór atrybutów $\mathcal{W}(v) \subseteq \mathcal{W}$ w taki sposób, że dla każdego i, $1 \leqslant i \leqslant m$, v wybiera w_i niezależnie z prawdopodobieństwem p_i, tzn. $\Pr\{w_i \in \mathcal{W}(v)\} = p_i$. Zauważmy, że jeżeli $\overline{p} = (p, \ldots, p)$, to $\mathcal{G}_I(n, m, \overline{p})$ i $\mathcal{G}(n, m, p)$ określają taką samą przestrzeń probabilistyczną. Dwumianowy losowy graf przecięć jest najbardziej wnikliwie zbadanym modelem spośród tych wspomnianych powyżej. Wystarczy wspomnieć prace [4, 5, 25, 31, 34]. Jednolity losowy graf przecięć jest rozpatrywany zwykle w kontekście modelowania sieci sensorowych z losową predystrybucją kluczy (patrz [7, 40, 44]). Losowy graf przecięć $\mathcal{G}_I(n, m, \overline{p})$ był badany między innymi w pracach [3, 10, 18, 37].

W tym opracowaniu zostaną przedstawione wyniki, na podstawie których można porównać własności losowych grafów przecięć i tak zwanego grafu losowego Erdősa–Rényiego $G(n, \hat{p})$, $\hat{p} \in [0, 1]$. W grafie $G(n, \hat{p})$ o zbiorze wierzchołków $\mathcal{V}$, $|\mathcal{V}| = n$, każda para wierzchołków $\{v, v'\}$, $v, v' \in \mathcal{V}$, połączona jest krawędzią niezależnie od innych par z prawdopodobieństwem $\hat{p}$. Klasyczne wyniki dotyczące tego modelu można znaleźć na przykład w monografiach [14, 26, 30].

Losowe grafy przecięć są rodziną grafów losowych, dla których niewielka zmiana parametrów wpływa znacznie na ich asymptotyczne własności. Już z wyników zawartych w dwóch pierwszych artykułach dotyczących losowych grafów przecięć [25, 31] wynika, że im większe jest m w stosunku do n, tym ewolucja modelu $\mathcal{G}(n, m, p)$ bardziej przypomina ewolucję $G(n, \hat{p})$ [25]. Natomiast dla małych m (w stosunku do n) można zauważyć wiele różnic między tymi modelami [31]. Wyniki stanowiące prezentowane tutaj osiągnięcie naukowe są w pewnym sensie kontynuacją badań zapoczątkowanych w [25, 31].

Dalsza część opisu wyników wchodzących w skład osiągnięcia naukowego podzielona jest na dwie części. W pierwszej części opisane są podobieństwa między dwumianowym losowym grafem przecięć a $G(n, \hat{p})$. Interesuje nas zakres parametrów, w którym w takim losowym grafie przecięć i $G(n, \hat{p})$ wartość oczekiwana liczby krawędzi jest podobna. W szczególności, w pracy [H1] wyznaczone są parametry, dla których $\mathcal{G}(n, m, p)$ i $G(n, \hat{p})$ są asymptotycznie równoważne (tzn. dla dużych n z prawdopodobieństwem bliskim 1 mają podobną strukturę). Natomiast w [H2, H5] konstruujemy sprzężenie (ang. coupling) modeli, dzięki któremu jesteśmy w stanie badać niektóre własności $\mathcal{G}_I(n, m, \overline{p})$ korzystając ze znanych wyników dotyczących $G(n, \hat{p})$ (lub grafu niewiele różniącego się od $G(n, \hat{p})$). Konstrukcje sprzężeń mogą zostać wykorzystane także w przypadku, gdy $\mathcal{G}_I(n, m, \overline{p})$ i $G(n, \hat{p})$ nie są sobie równoważne. Druga część opisu poświęcona jest różnicom między modelami. W analizie różnic skupimy się na takich charakterystykach losowego grafu przecięć jak: liczba niezależności [H3], liczba chromatyczna [H4], liczba małych podgrafów [H6]. Podkreślimy przede wszystkim te wyniki, z których wynika, że $G(n, \hat{p})$ i rozważany losowy graf przecięć mają różne własności, chociaż wartości oczekiwane liczby ich krawędzi są takie same.

We wszystkich granicach zakładamy, że $n \to \infty$. Wykorzystujemy standardową notację asymptotyczną $o(\cdot)$, $O(\cdot)$, $\Omega(\cdot)$, $\Theta(\cdot)$, $\sim$ i $\asymp$ zgodnie z [30]. Pisząc *asymptotycznie prawie na pewno* (a.p.n. w skrócie) rozumiemy z prawdopodobieństwem dążącym do 1 gdy n dąży do nieskończoności. Z uwagi na klarowność prezentacji, zazwyczaj pomijamy $\lfloor \cdot \rfloor$ i $\lceil \cdot \rceil$, gdy nie powoduje to niejasności. Dla dowolnego grafu G, oznaczamy przez $V(G)$ zbiór wierzchołków grafu G a przez $E(G)$ zbiór jego krawędzi.

2.1.1 Podstawowe fakty

W tym rozdziale przedstawimy kilka podstawowych własności losowych grafów przecięć, które będą stanowić kontekst dla wyników przedstawionych w dalszej części. Podamy prawdopodobieństwo powstania krawędzi dla każdego z rozpatrywanych modeli i zaprezentujemy kilka znanych wyników dotyczących przejścia fazowego, spójności i zawierania małych podgrafów.

Prawdopodobieństwo, że w grafie $\mathcal{G}(n,m,p)$ wierzchołki v i v' są połączone krawędzią wynosi

$$\Pr\{\{v,v'\}\in E(\mathcal{G}(n,m,p))\} = 1-(1-p^2)^m = 1-e^{-mp^2+O(mp^4)} = mp^2(1+o(1)), \qquad \text{dla } mp^2=o(1).$$

Naturalnym założeniem dotyczącym prawdopodobieństwa p w grafie $\mathcal{G}(n,m,p)$ (patrz [25]) jest: istnieje $C>0$ takie, że dla dowolnego n

$$C\frac{1}{n\sqrt[2]{m}} \leqslant p \leqslant \sqrt{\frac{3\ln n}{m}}. \tag{2.1}$$

Wynika to z faktu, że dla p większych niż $\sqrt{3\ln n/m}$ graf $\mathcal{G}(n,m,p)$ a.p.n. jest grafem pełnym na n wierzchołkach. Natomiast dla $p=o(1/(n\sqrt[2]{m}))$ graf $\mathcal{G}(n,m,p)$ a.p.n. nie ma żadnej krawędzi.

W tym paragrafie podsumujemy wyniki otrzymane w pracach [4, 31, 34, 42]. W tych artykułach zakładamy, że $m=n^\beta$, gdzie $\beta>0$ jest pewną stałą. Z twierdzeń udowodnionych w [4, 34] wynika, że jeżeli

$$mp^2=\frac{c}{n}, \quad m=n^\beta \tag{2.2}$$

i $\beta\geqslant 1$, to dla $c=1$ w grafie $\mathcal{G}(n,m,p)$ obserwujemy przejście fazowe[1], tzn. przejścia fazowe zarówno w $G(n,\hat{p})$ jak i w $\mathcal{G}(n,m,p)$ następują, gdy prawdopodobieństwo połączenia wierzchołków krawędzią jest bliskie $1/n$ (patrz [23]). W przypadku, gdy $\beta<1$ i p spełnia równanie (2.2), również następuje „nagłe” znaczne zwiększenie liczby wierzchołków w największej składowej spójności. Jednakże w tym przypadku dla $c>1$ a.p.n. największa składowa jest wielkości $o(n)$ (patrz [4]). W kontekście porównania modeli $\mathcal{G}(n,m,p)$ i $G(n,\hat{p})$, warto jeszcze wspomnieć o wartościach dwóch funkcji progowych grafu $\mathcal{G}(n,m,p)$: funkcji progowej spójności[2] [42] oraz funkcji progowej własności posiadania trójkąta jako podgrafu[3] [31]. Są one dane, odpowiednio, równaniami

$$mp^2=\begin{cases}\frac{(\ln n+\omega)^2}{m}, & \text{for } \beta\leqslant 1;\\ \frac{\ln n+\omega}{n}, & \text{for } \beta>1,\end{cases} \quad \text{and} \quad mp^2=\begin{cases}\frac{\omega}{n}, & \text{for } \beta\leqslant 3;\\ \frac{m^{1/3}\omega}{n^2}, & \text{for } \beta>3.\end{cases}$$

Powyżej wspomniane wyniki sugerują, że im większe β (tzn. im większe m w stosunku do n), tym modele $\mathcal{G}(n,m,p)$ i $G(n,\hat{p})$ są do siebie bardziej podobne. Jednakże dla każdej własności „duże β” może znaczyć coś innego.

Literatura dotycząca modeli $\mathcal{G}_u(n,m,d)$ i $\mathcal{G}_I(n,m,\overline{p})$ nie jest aż tak bogata jak w przypadku $\mathcal{G}(n,m,p)$. Prawdopodobieństwa krawędzi są następujące

$$\Pr\{\{v,v'\}\in E(\mathcal{G}_u(n,m,d))\} = 1-\frac{\binom{m-d}{d}}{\binom{m}{d}} = (1+o(1))\frac{d^2}{m}, \quad \text{dla } d=o(\sqrt{m});$$

$$\Pr\{\{v,v'\}\in E(\mathcal{G}_I(n,m,\overline{p}))\} = 1-\prod_{i=1}^{m}\left(1-p_i^2\right) = (1+o(1))\sum_{i=1}^{m}p_i^2 \quad \text{dla } \max_i p_i = o(1/\sqrt{m}).$$

Próg przejścia fazowego i funkcja progowa dla spójności $\mathcal{G}_u(n,m,d)$ są wyznaczone, odpowiednio, przez równania

$$\frac{d(d-1)}{m}=\frac{c}{n} \quad \text{and} \quad \frac{d^2}{m}=\frac{\ln n+\omega}{n} \text{ (patrz [P7]).}$$

[1] Tzn. dla $c<1$ a.p.n. największa składowa spójności ma $O(\ln n)$ wierzchołków a dla $c>1$ a.p.n. liczba wierzchołków w największej składowej wynosi $\Theta(n)$.

[2] Tzn. dla $\omega\to-\infty$ $\mathcal{G}(n,m,p)$ a.p.n. nie jest spójny a dla $\omega\to\infty$ a.p.n. jest spójny.

[3] Tzn. dla $\omega\to 0$ a.p.n. $\mathcal{G}(n,m,p)$ nie zawiera trójkąta a gdy $\omega\to\infty$, a.p.n. $\mathcal{G}(n,m,p)$ zawiera co najmniej jeden trójkąt.

Pewne wyniki dotyczące przejścia fazowego w $\mathcal{G}_I(n, m, \overline{p})$ można znaleźć w [18]. Wyniki zawarte w [18] podają warunki, które musi spełnić równanie $\sum_{i=1}^m p_i^2 = c$, aby wyznaczało ono próg przejścia fazowego. Wyniki dotyczące spójności grafu $\mathcal{G}_I(n, m, \overline{p})$ są zawarte w [H5] i są opisane w dalszej części tego opracowania.

2.2 Podobieństwa [H1, H2, H5]

Artykuł Scheinermana, Filla i Singer–Cohen [25] jest pierwszą pracą, która analizuje podobieństwa między $\mathcal{G}(n, m, p)$ i $G(n, \hat{p})$. W [25] zostało udowodnione, że dla dużych m (dokładniej dla m takich, że $m = n^\beta$ i $\beta > 6$), krawędzie w $\mathcal{G}(n, m, p)$ pojawiają się niemal niezależnie i w związku z tym modele $\mathcal{G}(n, m, p)$ i $G(n, \hat{p})$ są sobie równoważne. W oparciu o wyniki dotyczące małych podgrafów zawarte w pracy [31] Fill, Scheinerman i Singer–Cohen w artykule [25] postawili hipotezę, że warunek $\beta > 6$ może zostać zastąpiony warunkiem $\beta > 3$. Wyniki dotyczące liczby małych podgrafów [P6, 31]) pokazują, że dla $m = n^\beta$ i $\beta < 3$ na pewno takiej równoważności między modelami nie ma. W [H1] pokazujemy, że hipoteza z [25] jest prawdziwa dla własności monotonicznych[4], $m = n^\beta$ i $\beta > 3$.

Z drugiej strony, w świetle wyników zaprezentowanych w rozdziale 2.1.1, wydaje się interesujące to, że dla $m = n^\beta$ przy $\beta > 1$, mimo iż $\mathcal{G}(n, m, p)$ i $G(n, \hat{p})$ nie są równoważne (gdy $\beta < 3$ liczba trójkątów w $\mathcal{G}(n, m, p)$ jest zdecydowanie większa niż w $G(n, \hat{p})$ przy asymptotycznie tkaim samym prawdopodobieństwie połączenia dwóch wierzchołków krawędzią), funkcje progowe dla przejścia fazowego i spójności w obu modelach są takie same ([4, 22, 34, 42]). W pracach [H2, H5] badamy dokładniej ten fenomen przez analizę struktury grafu $\mathcal{G}(n, m, p)$ (oraz bardziej ogólnego modelu $\mathcal{G}_I(n, m, \overline{p})$). Uzyskane wyniki wykorzystujemy następnie, aby w elegancki sposób wyznaczyć funkcje progowe kilku istotnych własności grafowych dla modeli $\mathcal{G}(n, m, p)$ i $\mathcal{G}_I(n, m, \overline{p})$. Nasze rozumowanie częściowo zostało zainspirowane wcześniejszą pracą Efthymiou i Spirakisa [21], jednakże nasza metoda różni się w znaczący sposób od tej zastosowanej w [21]. Dzięki nowemu podejściu możemy o wiele precyzyjniej niż w [21] wyznaczyć funkcję progową dla własności posiadania cyklu Hamiltona.

2.2.1 Równoważność [H1]

Wyniki

Dowód głównego twierdzenia w [25] opiera się na tym, że dla dużych m (tzn. gdy $m = n^\beta$ i $\beta > 6$) i istotnych wartości p (patrz (2.1)) a.p.n. żaden z atrybutów nie został wybrany przez więcej niż dwa wierzchołki. W [H1] zostało pokazane, jak zmodyfikować dowód z [25], aby dowieść równoważność $\mathcal{G}(n, m, p)$ i $G(n, \hat{p})$ dla szerszego zakresu parametrów.

Twierdzenie 1 ([H1], Theorem 1). *Niech $a \in [0; 1]$, $\mathcal{A}$ będzie dowolną własnością grafową, $p = o\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{m}}\right)$ i*

$$\hat{p} = 1 - \exp\left(-mp^2(1-p)^{n-2}\right).$$

Wtedy

$$\Pr\{G(n, \hat{p}) \in \mathcal{A}\} \to a$$

[4]Dla rodziny $\mathcal{G}$ wszystkich grafów o zbiorze wierzchołków $\mathcal{V}$, podrodzinę $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$ nazywamy własnością jeśli jest zamknięta ze względu na izomorfizm grafów. Własność $\mathcal{A}$ jest rosnąca (odpowiednio, malejąca) jeśli dla dowolnych $G', G \in \mathcal{G}$ takich, że $E(G) \subseteq E(G')$ (odpowiednio, $E(G') \subseteq E(G)$) $G \in \mathcal{A}$ implikuje $G' \in \mathcal{A}$. Przykładami własności rosnących są: k–spójność, zawieranie skojarzenia doskonałego, zawieranie cyklu Hamiltona. Wszystkie własności rosnące i malejące nazywamy monotonicznymi.

wedy i tylko wtedy, gdy

$$\Pr\{\mathcal{G}(n,m,p) \in \mathcal{A}\} \to a.$$

W związku z powyższym twierdzeniem i równaniem (2.1) możemy w dalszych rozważaniach skupić się na przypadku, gdy istnieje stała $C > 0$ taka, że dla dowolnego n

$$C\frac{1}{n\sqrt[3]{m}} \leqslant p \leqslant \sqrt{\frac{3\ln n}{m}}. \tag{2.3}$$

Główny wynik [H1] dotyczy równoważności modeli dla własności monotonicznych.

Twierdzenie 2 ([H1], Theorem 2)**.** *Niech $a \in [0;1]$, $m = n^\beta$ dla pewnej stałej $\beta \geqslant 3$ i niech $\mathcal{A}$ będzie własnością monotoniczną.*

(i) Niech p spełnia (2.3) *oraz $1/(n\sqrt[3]{m}) = o(p)$ w przypadku, gdy $\beta = 3$.*
Jeśli

$$\Pr\left\{G\left(n, 1-\exp(-mp^2(1-p)^{n-2})\right) \in \mathcal{A}\right\} \to a$$

i dla dowolnego $\varepsilon = \varepsilon(n) \to 0$

$$\Pr\left\{G\left(n, (1+\varepsilon)(1-\exp(-mp^2(1-p)^{n-2}))\right) \in \mathcal{A}\right\} \to a,$$

to

$$\Pr\{\mathcal{G}(n,m,p) \in \mathcal{A}\} \to a.$$

(ii) Niech $\hat{p} = \hat{p}(n) = \Omega(n^{-2}m^{1/3})$ dla $\beta > 3$, $n^{-2}m^{1/3} = o(\hat{p})$ dla $\beta = 3$ oraz niech $\hat{p} = \hat{p}(n) \in [0; 1-\delta]$ dla pewnej stałej $\delta > 0$.
Jeśli dla dowolnego $\varepsilon = \varepsilon(n) \to 0$

$$\Pr\left\{\mathcal{G}\left(n, m, \sqrt{-\frac{\ln(1-\frac{\hat{p}}{1+\varepsilon})}{m}}\right) \in \mathcal{A}\right\} \to a$$

i

$$\Pr\left\{\mathcal{G}\left(n, m, \sqrt{-\frac{\ln(1-\hat{p})}{(1-\varepsilon)m}}\right) \in \mathcal{A}\right\} \to a,$$

to

$$\Pr\{G(n,\hat{p}) \in \mathcal{A}\} \to a.$$

W (i) i (ii) dla $\beta = 3$ musimy pominąć przypadki, gdy $p = \Theta(1/n\sqrt{m})$ i $\hat{p} = \Theta(n^{-2}m^{1/3})$, gdyż teza nie jest prawdziwa na progu pojawienia się trójkątów w grafie. Wynika to między innymi z rezultatów udowodnionych w [P6].

Zastosowane metody dowodowe pozwalają uzyskać mocniejsze wyniki przy wzmocnieniu niektórych założeń. Na przykład, dla $\beta > 3$ funkcja $\varepsilon(n)$ może być zastąpiona przez $1/n^\delta$, gdzie δ jest stałą zależną od β. Inne takie przypadki (dla $\beta > 4$ i $\beta > 10/3$) zostały ujęte w twierdzeniach 3 i 4 opisywanej tutaj pracy [H1].

Metody dowodowe

Niech $\mathcal{V}(w) = \{v \in \mathcal{V} : w \in \mathcal{W}(v)\}$ będzie zbiorem tych wierzchołków, które wybrały atrybut w w $\mathcal{G}(n,m,p)$. Z modelem $\mathcal{G}(n,m,p)$ jest związana pewna rodzina hipergrafów losowych $\mathcal{H}_k(n,m,p)$, $k = 2,3,\ldots,n$. Dla danego grafu $\mathcal{G}(n,m,p)$ i liczby całkowitej k, $2 \leqslant k \leqslant n$, $\mathcal{H}_k(n,m,p)$ jest hipergrafem o zbiorze wierzchołków $\mathcal{V}$ i zbiorze krawędzi $\{\{v_1,v_2,\ldots,v_k\} \subseteq \mathcal{V} : \exists_{w\in\mathcal{W}}\mathcal{V}(w) = \{v_1,v_2,\ldots,v_k\}\}$, tzn. jego zbiór krawędzi składa się z wszystkich zbiorów $\mathcal{V}(w)$ o mocy k. Istotne jest to, że w przestrzeni probabilistycznej grafu $\mathcal{G}(n,m,p)$ hipergrafy $\mathcal{H}_k(n,m,p)$, $k = 2,3,4,\ldots,n$, nie są niezależne. W [H1] został udowodniony lemat, który wyznacza odległość w sensie normy całkowitego wahania (ozn. d_{TV}, ang. total variation distance) między hipergrafami $\mathcal{H}_k(n,m,p)$, $2 \leqslant k \leqslant K$, a hipergrafami $H_k\left(n, 1-\exp(-mp^k(1-p)^{n-k})\right)$ $2 \leqslant k \leqslant K$, gdzie $H_k(n,q)$, $q \in [0,1]$, jest k–jednolitym hipergrafem o zbiorze wierzchołków $\mathcal{V}$ w którym każdy k–elementowy podzbiór zbioru $\mathcal{V}$ jest dodawany do zbioru krawędzi niezależnie, z prawdopodobieństwem q.

Lemat 1 ([H1], Lemma 5). *Niech $K \geqslant 2$ będzie stałą liczbą całkowitą a $p = o(1/n)$, wtedy*

$$d_{TV}\left(\bigcup_{k=2}^{K}\mathcal{H}_k(n,m,p), \bigcup_{k=2}^{K} H_k\left(n, 1-\exp(-mp^k(1-p)^{n-k})\right)\right) = o(1),$$

gdzie $H_k\left(n, 1-\exp(-mp^k(1-p)^{n-k})\right)$, $2 \leqslant k \leqslant K$, są niezależne.

Dla dowolnego hipergrafu $\mathcal{H}$, niech $G\mathcal{H}$ będzie grafem o tym samym zbiorze wierzchołków co $\mathcal{H}$, w którym para wierzchołków jest krawędzią, jeśli zawiera się w co najmniej jednej krawędzi hipergrafu $\mathcal{H}$. Wtedy z definicji wynika, że $E(\mathcal{G}(n,m,p)) = \bigcup_{k=2}^{n} E(G\mathcal{H}_k(n,m,p))$. W dowodzie głównego twierdzenia w [H1] wykorzystujemy tę równość oraz lemat 5 z pracy [H1]. Jesteśmy bowiem w stanie opisać związek między $\mathcal{G}(n,m,p)$ a $G(n,\hat{p})$ używając relacje między $G\mathcal{H}_k(n,m,p)$ a $GH_k\left(n, 1-\exp(-mp^k(1-p)^{n-k})\right)$. Ta technika zostało niedawno wykorzystana w [33], aby udowodnić równoważność (w sensie normy całkowitego wahania) $\mathcal{G}(n,m,p)$ i $G(n,\hat{p})$, gdy $\beta > 4$.

W pozostałej części dowodu zawartego w [H1] zostały skonstruowane odpowiednie sprzężenia grafów $GH_k(n,q_1)$, $k = 3,4,5$ z grafem $G(n,q_2)$ dla odpowiednich wartości q_1 i q_2. W przypadku $k = 3$ konstrukcja sprzężenia jest częściowo zainspirowana wynikami z [32]. Dowód kończy połączenie powyższego lematu, konstrukcji sprzężenia i tak zwanej „sandwiching technique".

2.2.2 Konstrukcje sprzężeń [H2, H5]

Wstęp

W tej części opracowania streścimy rezultaty uzyskane w pracach [H2] i [H5]. Skupimy się jednak na wynikach z [H5], gdyż w [H5] modyfikujemy i rozwijamy techniki wykorzystane w [H2]. W szczególności, w [H5] konstruujemy sprzężenie grafu $\mathcal{G}_I(n,m,\overline{p})$ nie tylko z grafem $G(n,\hat{p})$, ale także z innym grafem pomocniczym o podobnych własnościach do grafu $G(n,\hat{p})$. Pomocniczy graf jest sumą dwóch niezależnych grafów $G(n,\hat{p}_2)$ oraz $G_3(n,\hat{p}_3) = GH_3(n,\hat{p}_3)$[5]. Podkreślmy, że konstrukcja sprzężenia z $G(n,\hat{p})$ opisana w [H5] implikuje także główne wyniki z [H2].

Niech $\mathcal{G}_I(n,m,\overline{p})$ będzie losowym grafem przecięć takim, że $\overline{p} = (p_1,\ldots,p_m)$, $p_i \in (0,1)$ dla każdego $1 \leqslant i \leqslant m$. Przypomnijmy, że dla dowolnego atrybutu $w_i \in \mathcal{W}$, przez $\mathcal{V}(w_i)$ oznaczamy

[5] Przypomnijmy, że $H_3(n,\hat{p}_3)$ jest 3–jednolitym hipergrafem losowym z niezależnymi krawędziami a $GH_3(n,\hat{p}_3)$ to związany z nim graf zawierający te krawędzie, które są dwuelementowymi podzbiorami krawędzi z $H_3(n,\hat{p}_3)$.

zbiór wierzchołków, które wybrały atrybut w_i. Niech $X_i = |\mathcal{V}(w_i)|$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Wprowadźmy oznaczenia

$$\begin{aligned}
S_1 &= \mathbb{E}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \mathbb{I}_{\{X_i=1\}}) = \sum_{i=1}^{m} np_i\left(1-(1-p_i)^{n-1}\right);\\
S_2 &= \mathbb{E}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \mathbb{I}_{\{X_i \text{ jest nieparzyste}\}}) = \sum_{i=1}^{m} np_i\left(1-\frac{1-(1-2p_i)^n}{2np_i}\right);\\
S_3 &= \mathbb{E}\sum_{i=1}^{m}(\mathbb{I}_{\{X_i \text{ jest nieparzyste}\}} - \mathbb{I}_{\{X_i=1\}}) = \sum_{i=1}^{m} np_i\left(\frac{1-(1-2p_i)^n}{2np_i}-(1-p_i)^{n-1}\right);\\
S_{1,t} &= \mathbb{E}\sum_{i=1}^{m} X_i\mathbb{I}_{\{X_i=t\}} = \sum_{i=1}^{m} t\binom{n}{t}p_i^t(1-p_i)^{n-t}, \text{ dla } t=2,3,\ldots,n;
\end{aligned} \tag{2.4}$$

gdzie $\mathbb{I}_A$ jest indykatorową zmienną losową zdarzenia A.

Główne rezultaty

Konstrukcje sprzężeń

Istotną częścią pracy [H5] jest konstrukcja sprzężeń, które są zasadniczą częścią dowodu poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 3 ([H5], Theorem 2.1)**.** *Niech $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ będzie takie, że $p_i \in (0,1)$, dla każdego $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz niech S_1, S_2 i S_3 będą zdefiniowane jak w (2.4). Dla funkcji $\omega = \omega(n)$ dążącej do nieskończoności przy $n \to \infty$ oznaczmy*

$$\begin{aligned}
\hat{p} &= \frac{S_2 - \omega\sqrt{S_2} - 2S_2^2 n^{-2}}{2\binom{n}{2}};\\
\hat{p}_2 &= \begin{cases} \frac{S_1 - 3S_3 - \omega\sqrt{S_1} - 2S_1^2 n^{-2}}{2\binom{n}{2}}, & \text{dla } \sqrt{S_1} = o(S_1) \text{ i } \omega = o(S_3/\sqrt{S_1});\\ \frac{S_1 - \omega\sqrt{S_1} - 2S_1^2 n^{-2}}{2\binom{n}{2}}, & \text{dla } S_3 = O(\sqrt{S_1}); \end{cases}\\
\hat{p}_3 &= \begin{cases} \frac{S_3 - \omega\sqrt{S_1} - 6S_3^2 n^{-3}}{\binom{n}{3}}, & \text{dla } \sqrt{S_1} = o(S_1) \text{ i } \omega = o(S_3/\sqrt{S_1});\\ 0, & \text{dla } S_3 = O(\sqrt{S_1}). \end{cases}
\end{aligned}$$

Jeśli $S_1 \to \infty$ i $S_1 = o(n^2)$, to dla każdej własności rosnącej $\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \Pr\{G(n,\hat{p}) \in \mathcal{A}\} &\leqslant \limsup_{n\to\infty} \Pr\{\mathcal{G}_I(n,m,\overline{p}) \in \mathcal{A}\}, \\
\liminf_{n\to\infty} \Pr\{G(n,\hat{p}_2) \cup G_3(n,\hat{p}_3) \in \mathcal{A}\} &\leqslant \limsup_{n\to\infty} \Pr\{\mathcal{G}_I(n,m,\overline{p}) \in \mathcal{A}\}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Warto wspomnieć, że założenie $S_1 \to \infty$ jest bardzo naturalne. Wynika to z tego, że równanie $S_1 = \Theta(1)$ wyznacza funkcję progową własności posiadania co najmniej jednej krawędzi.

Minimalne stopnie

Duża część pracy [H5] jest poświęcona wyznaczeniu funkcji progowych niektórych własności grafowych. Skupiamy się na własnościach monotonicznych $\mathcal{A}$ takich, że warunkiem koniecznym posiadania własności $\mathcal{A}$ jest z góry określony minimalny stopień grafu. Dlatego istotnym rezultatem w [H5] jest wyznaczenie funkcji progowych dla własności $\delta(\mathcal{G}_I(n,m,\overline{p})) \geqslant k$ dla $k = 1, 2, \ldots$[6]. Wyniki dotyczące tych funkcji progowych zawarte są w lematach 5.1, 5.2 i 5.3 w [H5]. Jako przykład podajemy tutaj ostatni z wymienionych lematów.

Lemat 2 ([H5], Lemma 5.3). *Niech $p = p(n) \in (0,1)$, k będzie dodatnią stałą liczbą całkowitą, $m = m(n)$ będzie takie, że $\ln^2 n = o(m)$, oraz*

$$a_n = (np)^{k-1}\left(\left(\frac{e^{-np}\ln n}{1-e^{-np}}\right)^{k-1} + \frac{e^{-np}\ln n}{1-e^{-np}}\right).$$

Jeśli

$$p(1-(1-p)^{n-1}) = \frac{\ln n + \ln(\max\{1, a_n\}) + c_n}{m},$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{\delta(\mathcal{G}(n,m,p)) \geqslant k\} = \begin{cases} 0 & \text{dla } c_n \to -\infty; \\ 1 & \text{dla } c_n \to \infty. \end{cases}$$

Funkcje progowe

Metoda wykorzystująca powyżej wspomniane konstrukcje sprzężeń pozwala na wyznaczenie w elegancki sposób oszacowań na funkcje progowe wielu własności. W [H2, H5] jako przykłady zostały podane funkcje progowe dla k–spójności, własności posiadania skojarzenia doskonałego i posiadania cyklu Hamiltona w $\mathcal{G}_I(n,m,\overline{p})$ i $\mathcal{G}(n,m,p)$. Rezultaty te zostały zawarte w [H5] jako twierdzenia 2.2–2.6 i wnioski 2.1–2.3. Poniżej cytujemy przykładowe trzy z tych wyników.

Twierdzenie 4 ([H5], Theorem 2.3). *Niech $\max_{1\leqslant i\leqslant m} p_i = o((\ln n)^{-1})$ i S_1 będzie dane równaniem* (2.4)*. Jeśli $S_1 = 2n(\ln 2n + c_{2n})$, to*

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{\mathcal{G}(2n, m(2n), \overline{p}(2n)) \text{ ma skojarzenie doskonałe}\} = \begin{cases} 0 & \text{dla } c_{2n} \to -\infty; \\ e^{-e^{-c}} & \text{dla } c_{2n} \to c \in (-\infty, \infty); \\ 1 & \text{dla } c_{2n} \to \infty. \end{cases}$$

Twierdzenie 5 ([H5], Theorem 2.4). *Niech $\max_{1\leqslant i\leqslant m} p_i = o((\ln n)^{-1})$, S_1 i $S_{1,2}$ będą dane równaniem* (2.4) *oraz niech $a_n = \frac{S_{1,2}}{S_1}$. Jeśli $S_1 = n(\ln n + \ln\ln n + c_n)$, to*

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{\mathcal{G}_I(n,m,\overline{p}) \text{ ma cykl Hamiltona}\} = \begin{cases} 0 & \text{dla } c_n \to -\infty \\ & \text{oraz } \liminf_{n\to\infty} a_n = a \in (0,1]; \\ 1 & \text{dla } c_n \to \infty. \end{cases}$$

Twierdzenie 6 ([H5], Corollary 2.3). *Niech k będzie nieujemną liczbą całkowitą. Jeśli*

$$p(1-(1-p)^{n-1}) = \begin{cases} \frac{\ln n + c_n}{m}, & \text{dla } \ln^2 n = o(m) \text{ i } m = o\left(\frac{n\ln n}{\ln\ln n}\right); \\ \frac{\ln n + (k-1)\ln\ln n + c_n}{m}, & \text{dla } m = \Omega(n\ln n), \end{cases}$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{\mathcal{G}(n,m,p) \text{ jest } k\text{–spójny}\} = \begin{cases} 0 & \text{dla } c_n \to -\infty; \\ 1 & \text{dla } c_n \to \infty. \end{cases}$$

[6]przez $\delta(G)$ oznaczamy minimalny stopień grafu G.

Metody dowodowe

[H5] zawiera wiele lematów i częściowych rezultatów, które prowadzą do wyników dotyczących funkcji progowych. Dowody twierdzeń 2.2–2.6 z [H5] generalnie składają się z dwóch części. Pierwsza część wyznacza oszacowanie górne a druga oszacowanie dolne na $\lim_{n\to\infty} \Pr\{\mathcal{G}_I(n,m,\overline{p}) \in \mathcal{A}\}$ (gdzie $\mathcal{A}$ jest k–spójnością, własnością zawierania skojarzenia doskonałego lub zawierana cyklu Hamiltona – w zależności od twierdzenia).

Pierwszym krokiem jest konstrukcja sprzężenia $\mathcal{G}_I(n,m,\overline{p})$ z $G(n,\hat{p}_2) \cup G_3(n,\hat{p}_3)$. Następnie ta konstrukcja sprzężenia jest wykorzystana do dowodu twierdzenia 2.1 z [H5] (podanego powyżej jako twierdzenie 3). Analiza własności grafu $G(n,\hat{p}_2) \cup G_3(n,\hat{p}_3)$ w połączeniu z twierdzeniem 2.1 lub bezpośrednio ze skonstruowanym wcześniej sprzężeniem pozwalają oszacować $\lim_{n\to\infty} \Pr\{\mathcal{G}_I(n,m,\overline{p}) \in \mathcal{A}\}$ z dołu.

Wszystkie ograniczenia z góry wartości $\lim_{n\to\infty} \Pr\{\mathcal{G}_I(n,m,\overline{p}) \in \mathcal{A}\}$ wynikają z faktu, że dla każdej z rozpatrywanych własności warunkiem koniecznym posiadania tej własności przez graf jest odpowiedni minimalny stopień. Dlatego ograniczenia górne wynikają z lematów 5.1–5.3 w [H5]. W dowodzie tych lematów wykorzystujemy konstrukcję sprzężenia pewnego procesu kolekcjonowania kuponów i pewnego procesu konstruującego $\mathcal{G}_I(n,m,\overline{p})$.

Niewiele słabsze wyniki dotyczące funkcji progowych w $\mathcal{G}(n,m,p)$ można otrzymać wykorzystując część (2.5) twierdzenia 2.1 [H5] oraz klasyczne rezultaty dotyczące funkcji progowych w $G(n,\hat{p})$. To podejście do problemu zostało wykorzystane w [H2].

2.3 Różnice [H3, H4, H6]

Przypomnijmy, że zbiór krawędzi losowego grafu przecięć jest sumą krawędzi klik o zbiorach wierzchołków $\mathcal{V}(w)$, $w \in \mathcal{W}$. Gdy a.p.n. wiele z tych klik ma więcej niż dwa wierzchołki, to można się spodziewać, że własności losowego grafu przecięć różnią się bardzo od własności grafu $G(n,\hat{p})$. Na przykład, gdy dla pewnego $k \geqslant 3$

$$1/\left(n\sqrt[k]{m}\right) = o(p), \tag{2.6}$$

a.p.n. liczba klik o k wierzchołkach generowanych przez zbiory $\mathcal{V}(w)$ w $\mathcal{G}(n,m,p)$ dąży do nieskończoności, co może wpłynąć na liczbę niektórych małych podgrafów w $\mathcal{G}(n,m,p)$. W tej części prezentacji będziemy omawiać wyniki, które pokazują w jakim stopniu duże kliki generowane przez $\mathcal{V}(w)$, $w \in \mathcal{W}$, wpływają na strukturę losowego grafu przecięć. Naszym celem jest zrozumienie, jaki wpływ mają te kliki na takie parametry jak: liczba niezależności, liczba chromatyczna grafu oraz liczba małych podgrafów w losowym grafie przecięć.

2.3.1 Liczba niezależności [H3]

Jednym z celów pracy nad zagadnieniami podjętymi w [H3] było wzmocnienie i uzupełnienie wyników uzyskanych przez Nikoletseasa, Raptopoulosa i Spirakisa [37, 38]. Przede wszystkim w [H3] przedstawiamy bliskie optymalnym oszacowania na liczbę niezależności dla dość szerokiej rodziny parametrów. Analizujemy również dokładnie zachowanie klasycznego algorytmu zachłannego konstruującego maksymalny zbiór niezależny na grafach $\mathcal{G}(n,m,p)$ i $\mathcal{G}_u(n,m,d)$ oraz proponujemy nowy zachłanny algorytm, którego działanie bazuje na strukturze grafu przecięć i w związku z tym efektywniej znajduje zbiór niezależny w niektórych losowych grafach przecięć. Niech $\alpha_1(G)$ i $\alpha_2(G)$ będą rozmiarami zbiorów niezależnych skonstruowanych w grafie przecięć G przez, odpowiednio, algorytm zachłanny i nowy algorytm zachłanny. Dla dowolnego grafu przecięć G

$$\alpha_1(G) \leqslant \alpha(G) \quad \text{and} \quad \alpha_2(G) \leqslant \alpha(G),$$

gdzie przez $\alpha(G)$ oznaczamy liczbę niezależności grafu G.

Główne wyniki pracy [H3] prezentujemy w poniższych tabelach.

Twierdzenie 7. *(i) Niech $m = m(n) \to \infty$ będzie ciągiem dodatnich liczb całkowitych takich, że $m = o(n)$ oraz niech*

$$d = d(n) = \lfloor a_n \ln(n/m) \rfloor \geqslant 2,$$

będzie takie, że $a_n \in (0;\infty)$ oraz $1/n = o(d^2/m)$ i $d^2/m = o(1)$. Wtedy a.p.n.

<table>
<tr><td colspan="3">[H3], Theorem 1</td></tr>
<tr><td>$\alpha(\mathcal{G}_u(n,m,d))$</td><td>$\alpha_1(\mathcal{G}_u(n,m,d))$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sim m/d$</td><td>dla $a_n = o(1)$;</td></tr>
<tr><td>$\leqslant m/d$</td><td>$\sim \left((1-e^{-\frac{1}{a}})m\right) \Big/ d$</td><td>dla $a_n \to a \ \in (0;1)$;</td></tr>
<tr><td>$\leqslant (1+o(1))cm/d$</td><td>$\sim \left((1-e^{-\frac{1}{a}})m\right) \Big/ d$</td><td>dla $a_n \to a \ \in (1;\infty)$ i $\frac{(1-c)\ln(1-c)+c}{c} = \frac{1}{a}$;</td></tr>
<tr><td>$\leqslant \left((1+o(1))2\ln\frac{d^2n}{m}\right) \Big/ \frac{d^2}{m}$</td><td>$\sim \left(\ln\frac{d^2n}{m}\right) \Big/ \frac{d^2}{m}$</td><td>dla $a_n \to \infty$.</td></tr>
</table>

(ii) Niech $m = m(n) \to \infty$ będzie takie, że $m = o(n)$ oraz $m \geqslant n^\beta$ dla pewnej stałej $\beta > 0$. W dodatku niech

$$p = a_n \frac{\ln\frac{n}{m} + b_n \ln\ln\frac{n}{m}}{m}, \qquad \frac{1}{n} = o(mp^2) \quad i \quad mp^2 = o(1).$$

Wtedy a.p.n.

<table>
<tr><td colspan="4">[H3], Theorem 2</td></tr>
<tr><td>$\alpha(\mathcal{G}(n,m,p))$</td><td>$\alpha_1(\mathcal{G}(n,m,p))$</td><td>$\alpha_2(\mathcal{G}(n,m,p))$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">$\sim n$</td><td>dla $a_n \ln\frac{n}{m} \to 0$ i $b_n = 0$;</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\sim ne^{-a}n$</td><td>dla $a_n \ln\frac{n}{m} \to a \in (0;\infty)$ i $b_n = 0$;</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\sim m^{a_n} \Big/ n^{a_n - 1}$</td><td>dla $a_n \to a \in [0;1)$ i $b_n = 0$;</td></tr>
<tr><td>$\leqslant (1+o(1))\frac{m}{b}$</td><td>$\sim \frac{m\ln\ln\frac{n}{m}}{\ln\frac{n}{m}}$</td><td>$\geqslant (1+o(1))\frac{m}{\lfloor b+1 \rfloor}$</td><td>dla $a_n = 1$ i $b_n = b \in (1;\infty)$;</td></tr>
<tr><td>$\leqslant (1+o(1))\frac{c(a)}{p}$</td><td>$\sim \frac{\ln(\frac{a}{a-1})}{p}$</td><td>$\geqslant (1+o(1))\frac{\frac{a}{a-1}\ln(\frac{a}{a-1})}{p}$</td><td>dla $a_n \to a \in (1;\infty)$ i $b_n = 0$, gdzie $c = c(a)$ jest rozwiązaniem równania $\frac{a-1}{a} = \frac{\ln(1+c)}{c}$;</td></tr>
<tr><td>$\leqslant (1+o(1))\frac{2\ln(nmp^2)}{mp^2}$</td><td>$\sim \frac{\ln(nmp^2)}{mp^2}$</td><td>$\sim \frac{\ln(nmp^2)}{mp^2}$</td><td>dla $a_n \to \infty$ i $b_n = 0$.</td></tr>
</table>

(iii) ([H3], Theorem 1 i 2) Niech $m = m(n) \to \infty$ spełnia zależność $n = O(m)$. W dodatku niech $1/n = o(mp^2)$ i $mp^2 = o(1)$ oraz $1/n = o(d^2/m)$ i $d^2/m = o(1)$. Wtedy a.p.n.

$$\alpha(\mathcal{G}_u(n,m,d)) \leqslant (1+o(1))\frac{2\ln(\frac{nd^2}{m})}{\frac{d^2}{m}}, \qquad \alpha_1(\mathcal{G}_u(n,m,d)) \sim \frac{\ln(\frac{nd^2}{m})}{\frac{d^2}{m}},$$

$$\alpha(\mathcal{G}(n,m,p)) \leqslant (1+o(1))\frac{2\ln(nmp^2)}{mp^2}, \qquad \alpha_1(\mathcal{G}(n,m,p)) \sim \alpha_2(\mathcal{G}(n,m,p)) \sim \frac{\ln(nmp^2)}{mp^2}.$$

Porównując twierdzenia 1 i 2 z [H3] oraz wyniki dotyczące liczby niezależności w $G(n,\hat{p})$ (patrz [17, 27, 36]) dochodzimy do wniosku, że jeżeli $n = O(m)$ lub $a_n \to \infty$, to $\alpha_1(\mathcal{G}_u(n,m,d))$ i $\alpha_1(\mathcal{G}(n,m,p))$ mają asymptotycznie te same wartości co $\alpha_1(G(n,\hat{p}))$ dla $G(n,\hat{p})$ z podobnym prawdopodobieństwem krawędzi [7]. Dodatkowo, dla takiego zakresu parametrów ograniczenia górne na $\alpha(\mathcal{G}_u(n,m,d))$ i $\alpha(\mathcal{G}(n,m,p))$ są asymptotycznie równe wartości $\alpha(G(n,\hat{p}))$. Wydaje się, że ograniczenia górne na wartości $\alpha(\mathcal{G}_u(n,m,d))$ i $\alpha(\mathcal{G}(n,m,p))$ pokazane w twierdzeniach 1 i 2 pracy [H3] są asymptotycznie optymalne.

Z drugiej strony, w przypadku, gdy $m = o(n)$ i $a_n = O(1)$, nie tylko wartości $\alpha_1(\mathcal{G}_u(n,m,d))$ i $\alpha_1(\mathcal{G}(n,m,p))$ znacznie się różnią od $\alpha_1(G(n,\hat{p}))$, ale także zmienia się wartość ilorazu α/α_1. Warto wspomnieć, że dla $a_n = o(1)$ zbiór niezależny skonstruowany przez algorytm zachłanny (zarówno klasyczny jak i nowy) dla $\mathcal{G}_u(n,m,d)$ i $\mathcal{G}(n,m,p)$ jest niemal optymalny, tzn. a.p.n. $\alpha/\alpha_1 \sim 1$. Dla $a_n = 1$ i $b \in (1,\infty)$ rozmiar zbioru niezależnego skonstruowanego przez nowy algorytm zachłanny jest również bliski wartości $\alpha(\mathcal{G}(n,m,p))$. Dla porównania, w przypadku najlepszych algorytmów wielomianowych, które konstruują zbiór niezależny w $G(n,\hat{p})$ rozpatrywany iloraz $\alpha(G(n,\hat{p}))/\alpha_1(G(n,\hat{p}))$ dąży do dwójki (patrz [28]).

Metody dowodowe

W dowodach używane są procesy Markowa, w których zaczynamy z pustym zbiorem wierzchołków i z danym zbiorem atrybutów $\mathcal{W}$. W każdym kroku dodajemy jeden wierzchołek do grafu przecięć oraz wybieramy jego zbiór atrybutów $\mathcal{W}(v) \subseteq \mathcal{W}$ zgodnie z odpowiednim rozkładem prawdopodobieństwa. Na tej bazie dodajemy krawędzie do grafu przecięć. Większość rezultatów wynika z dokładnej analizy tych procesów Markowa.

2.3.2 Liczba chromatyczna [H4]

Badania nad określeniem liczby chromatycznej jednolitego losowego grafu przecięć były zainspirowane wynikami uzyskanymi przez Behrischa, Taraza i Ueckerdta [5] oraz Nikoletseasa, Raptopoulosa i Spirakisa [39]. Z [5] i [39] wynika, że w wielu przypadkach liczba chromatyczna grafu $\mathcal{G}(n,m,p)$ jest równa asymptotycznie jego liczbie klikowej. Praca [H4] dotyczy podobnych zagadnień dla jednolitego losowego grafu przecięć, ale wykorzystane metody dowodowe różnią się diametralnie od tych z [5] i [39].

Główne wyniki w pracy [H4] są przedstawione w języku hipergrafów losowych. Dlatego najpierw zaprezentujemy wyniki dla hipergrafów a następnie pokażemy, jak z nich wynikają rezultaty dotyczące losowych grafów przecięć. W tym celu wyjaśnimy zależność między tymi dwiema strukturami dyskretnymi.

Niech $\mathbb{H}_k(m,n)$, $k \geqslant 2$, będzie hipergrafem losowym o zbiorze wierzchołków $\mathcal{W}$, $|\mathcal{W}| = m$, i n krawędziach losowanych niezależnie z powtórzeniami ze zbioru wszystkich k–elementowych podzbiorów zbioru $\mathcal{W}$. Praca [H4] jest poświęcona indeksowi chromatycznemu hipergrafu $\mathbb{H}_k(m,n)$.

Problem ten jest związany z uogólnieniem twierdzenia Vizinga dla hipergrafów (hipotezy i niektóre wyniki dotyczące tego zagadnienia można znaleźć na przykład w [1] i [6]). Pippenger i Spencer w [41] udowodnili, że twierdzenie Vizinga w pewnym sensie może być uogólnione w przypadku hipergrafów, w których stopnie wierzchołków niewiele się różnią od siebie i są dużo większe niż kostopnie (ang. codegrees)[8]. Z rezultatu udowodnionego w [41] można wywnioskować, że a.p.n. $\chi'(\mathbb{H}_k(m,n)) = \bar{d}(1 \pm \varepsilon)$[9] dla $\bar{d} = \frac{kn}{m}$, $\ln m = o(\bar{d})$ i stałego k. W [H4] zawarte są asymptotyczne

[7] Tzn. $\alpha_1(\mathcal{G}_u(n,m,d)) \sim \alpha_1(G(n,\hat{p}))$ i $\alpha_1(\mathcal{G}(n,m,p)) \sim \alpha_1(G(n,\hat{p}))$, gdy $\hat{p} \sim d^2/m$ lub $\hat{p} \sim mp^2$.

[8] Kostopniem wierzchołków v_1 i v_2 nazywamy liczbę krawędzi, które zawierają zarówno v_1 jak i v_2.

[9] $a = b \pm c$ należy rozumieć jako $b - c \leqslant a \leqslant b + c$.

wyniki dotyczące algorytmicznej wersji twierdzenia o indeksie chromatycznym dla hipergrafu losowego, przy założeniu, że k może być funkcją rosnącą z m. Podane poniżej twierdzenie to główny wynik z [H4].

Twierdzenie 8 ([H4], Theorem 1.2)**.** *Niech $\bar{d} = \frac{kn}{m}$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje stała $c_\varepsilon > 0$, taka, że jeśli*

$$k \leqslant c_\varepsilon \ln\left(\frac{m}{\ln \bar{d}}\right) \quad i \quad k \leqslant c_\varepsilon \ln\left(\frac{\bar{d}}{\ln m}\right), \tag{2.7}$$

to istnieje algorytm zachłanny, który z prawdopodobieństwem co najmniej $1 - \frac{2}{m} - \frac{2}{\bar{d}}$ koloruje w sposób właściwy krawędzie hipergrafu $\mathbb{H}_k(m, n)$ co najwyżej $\lceil \bar{d}(1+\varepsilon) \rceil$ kolorami.

Zauważmy, że graf $\mathcal{G}_u(n, m, k)$ jest grafem krawędziowym hipergrafu $\mathbb{H}_k(m, n)$. Stąd wynika, że $\chi'(\mathbb{H}_k(m, n)) = \chi(\mathcal{G}_u(n, m, k))$, więc możemy bezpośrednio zastosować twierdzenie 1.2 z [H4], aby uzyskać następujący wniosek.

Wniosek 1. *Niech $n^\beta \leqslant m \leqslant n/\ln n$ dla pewnej stałej $\beta > 0$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje c_ε takie, że jeśli*

$$2 \leqslant k \leqslant c_\varepsilon \ln \frac{n}{m}, \tag{2.8}$$

to a.p.n.

$$\chi(\mathcal{G}_u(n, m, k)) = (1 \pm \varepsilon)\frac{kn}{m}.$$

Liczba chromatyczna każdego grafu G o n wierzchołkach jest w prosty sposób związana z jego liczbą niezależności $\alpha(G)$ i jego liczbą klikową $\omega(G)$ następującymi zależnościami

$$\chi(G) \geqslant \frac{n}{\alpha(G)} \quad \text{i} \quad \chi(G) \geqslant \omega(G). \tag{2.9}$$

Dla $G(n, \hat{p})$, gdy $n\hat{p} \to \infty$, a.p.n. pierwsza z nierówności (2.9) jest niemal optymalna (patrz [15, 16, 27, 35, 36]). Natomiast nasz rezultat, w połączeniu z wcześniejszymi wynikami dotyczącymi $\mathcal{G}_u(n, m, k)$ i hipergrafów losowych, pokazuje, że przy założeniach twierdzenia 1.2 z [H4], obie nierówności w (2.9) są a.p.n. niemal optymalne dla $G = \mathcal{G}_u(n, m, k)$. Wynika to stąd, że a.p.n. największy zbiór niezależny w $\mathcal{G}_u(n, m, k)$ ma wielkość $\frac{m}{k}(1 \pm \varepsilon)$, gdy spełnione jest (2.8) (patrz [H3]). W dodatku główny wynik z [2] pokazuje, że a.p.n. $\omega(\mathcal{G}_u(n, m, k)) = \frac{kn}{m}(1 \pm \varepsilon)$ gdy $k = o(n^{1/3})$ i $\frac{kn}{m} \to \infty$ dostatecznie szybko.

Zakończymy uwagą dotyczącą algorytmicznej części tego wyniku. Liczba kolorów wykorzystywana przez algorytmy zachłanne na grafie $G(n, \hat{p})$ a.p.n. jest równa asymptotycznie podwojonej liczbie chromatycznej (patrz na przykład [28] lub rozdział 7.2 [30]). Zaproponowany w [H4] algorytm zachłanny konstruuje a.p.n. prawie optymalne kolorowanie $\mathcal{G}_u(n, m, k)$. Następnym naturalnym pytaniem jest, dla jakiego zakresu parametrów istnieje taki algorytm zachłanny. Wyniki z [H3] mogą dać pewien obraz tego, jak może wyglądać odpowiedź na to pytanie.

Metody dowodowe

Algorytm rozpatrywany w twierdzeniu 2.1 w [H4] jest naturalnym losowym wielomianowym algorytmem, który po kolei dla każdej krawędzi wybiera losowy kolor spośród kolorów z zadanej palety kolorów. Dowód twierdzenia 2.1 w [H4] wykorzystuje tak zwaną metodę równań różniczkowych opisaną w pracach [12, 43] i tym samym różni się od metody zastosowanej w [41]. W dodatku, w tym przypadku nie można było bezpośrednio zastosować twierdzeń z [12, 43]. Zamiast tego skonstruowane zostały odpowiednie martyngały. Wykorzystując odpowiednie nierówności martyngałowe można było w każdym kroku algorytmu oszacować zarówno liczbę wierzchołków „pokolorowanych" danym kolorem jak i liczbę „dostępnych" kolorów dla dowolnego k–elementowego podzbioru zbioru $\mathcal{W}$.

2.3.3 Liczba małych podgrafów [H6]

Badania podjęte w [H6] są kontynuacją prac rozpoczętych w [P6, 31]. Głównym celem w [H6] było określenie rozkładu liczby małych podgrafów w $\mathcal{G}(n,m,p)$ dla p odpowiadającego funkcji progowej posiadania tych małych podgrafów.

Niech H_0 będzie ustalonym grafem o $h \geqslant 2$ wierzchołkach i $e \geqslant 1$ krawędziach oraz niech $K_\mathcal{V}$ oznacza graf pełny o zbiorze wierzchołków $\mathcal{V}$. Przez $\mathcal{H}_0$ oznaczamy zbiór podgrafów grafu $K_\mathcal{V}$ izomorficznych z H_0. Kopia $H \in \mathcal{H}_0$ grafu H_0 jest *indukowana* w $\mathcal{G}(n,m,p)$ jeśli wszystkie krawędzie H są krawędziami w $\mathcal{G}(n,m,p)$ a wierzchołki niepołączone w H nie są połączone krawędzią w $\mathcal{G}(n,m,p)$. W [H6] znajdujemy wartości n, m i p oraz rodzinę grafów H_0, dla których liczba indukowanych kopii H_0 w $\mathcal{G}(n,m,p)$ ma w przybliżeniu rozkład Poissona.

Liczbę indukowanych kopii grafu H_0 w $\mathcal{G}(n,m,p)$ oznaczamy przez $X = X(H_0)$. Jedynym grafem, dla którego został wcześniej określony asymptotyczny rozkład zmiennej $X(H_0)$ na progu powstania w $\mathcal{G}(n,m,p)$ jest graf pełny na h wierzchołkach $H_0 = K_h$ [P6].

W pracy [31] została poczyniona obserwacja, że każdy podgraf w $\mathcal{G}(n,m,p)$ może powstać w wyniku zaistnienia jednego z kilku możliwych układów zależności między wierzchołkami i ich atrybutami. Aby to opisać wprowadzono tak zwane pokrycia klikowe grafu. *Pokrycie klikowe* $\mathbf{C} = \{C_1,\ldots,C_t\}$ grafu H_0 jest to rodzina niepustych podzbiorów zbioru $V(H_0)$ taka, że podgraf indukowany na $C_i \in \mathbf{C}$ jest kliką w H_0 oraz dla każdej krawędzi $\{v_1,v_2\} \in E(H_0)$ istnieje zbiór $C_i \in \mathbf{C}$ dla którego $v_1, v_2 \in C_i$. Jeśli w dodatku $|C_i| \geqslant 2$ dla każdego $C_i \in \mathbf{C}$ mówimy, że pokrycie klikowe jest *właściwe*. Przez $\mathcal{C}(H_0)$ oznaczamy zbiór wszystkich właściwych pokryć klikowych grafu H_0. Mówimy, że $H \in \mathcal{H}_0$ jest *indukowany* w $\mathcal{G}(n,m,p)$ przez pokrycie klikowe $\mathbf{C} = \{C_1,\ldots,C_t\}$ grafu H_0 (grafu H)[10] jeśli istnieje rodzina niepustych podzbiorów $\{W_1,\ldots,W_t\}$ zbioru $\mathcal{W}$ takich, że $\mathcal{V}(w) \cap V(H) = C_i$ dla dowolnego $w \in W_i$, $i = 1,2,\ldots,t$ oraz $|\mathcal{V}(w) \cap V(H)| \leqslant 1$ dla dowolnego $w \in \mathcal{W} \setminus (\bigcup_{i=1}^t W_i)$. Z definicji wynika, że jeśli H jest indukowanym podgrafem $\mathcal{G}(n,m,p)$, to jest on indukowany przez dokładnie jedno pokrycie klikowe z $\mathcal{C}(H_0)$ w $\mathcal{G}(n,m,p)$.

Niech $\mathbf{C} = \{C_1,\ldots,C_t\}$ będzie pokryciem klikowym grafu H_0 (nie koniecznie z $\mathcal{C}(H_0)$). Wprowadźmy oznaczenia: $|\mathbf{C}| = t$ i $\sum \mathbf{C} = \sum_{i=1}^t |C_i|$. Oznaczymy pokrycie klikowe otrzymane z $\mathbf{C}$ po wyrzuceniu wszystkich jednoelementowych zbiorów przez $\mathbf{C}' = \{C_i : |C_i| \geqslant 2,\ i \in [t]\}$. Dla ustalonego $\emptyset \subsetneq S \subsetneq V(H)$, zdefiniujemy dwa typy *obciętych pokryć klikowych*, które są multizbiorami zdefiniowanymi w następujący sposób

$$\mathbf{C}[S] = \{C_i \cap S : |C_i \cap S| \geqslant 1,\ i \in [t]\} \quad \text{and} \quad \mathbf{C}'[S] = \{C_i \cap S : |C_i \cap S| \geqslant 2,\ i \in [t]\}.$$

Gdy $\mathbf{C}$ indukuje $H \in \mathcal{H}_0$, wtedy $\mathbf{C}[S]$ i $\mathbf{C}'[S]$ indukują podgraf indukowany $H[S]$. Zdefiniujmy rozmiary multizbiorów $\mathbf{C}[S]$, $\mathbf{C}'[S]$ przez

$$\sum \mathbf{C}[S] = \sum_{\substack{i\in[t] \\ |C_i\cap S|\geqslant 1}} |C_i \cap S| \quad \text{i} \quad \sum \mathbf{C}'[S] = \sum_{\substack{i\in[t] \\ |C_i\cap S|\geqslant 2}} |C_i \cap S|.$$

Niech $X(H_0,\mathbf{C},S)$ będzie liczbą kopii $H_0[S]$ indukowanych przez $\mathbf{C}$ i $\mathbf{C}'$. W [31] zostało pokazane, że przy założeniu $mp^2 = o(1)$,

$$\mathbb{E}(X(H_0,\mathbf{C},S)) \asymp \psi(H_0,\mathbf{C},S) \stackrel{def.}{=} \min\left\{n^{|S|+\alpha|\mathbf{C}[S]|}p^{\sum \mathbf{C}[S]}, n^{|S|+\alpha|\mathbf{C}'[S]|}p^{\sum \mathbf{C}'[S]}\right\}.$$

[10]Dla wygody nie będziemy rozróżniać C_i w H_0 oraz jej kopii w izomorficznym grafie H.

Interesuje nas wartość $p = p(n)$, dla której $\mathbb{E}(X(H_0, \mathbf{C}, S)) \asymp 1$. W tym celu zdefiniujmy

$$\eta_2(H_0, \mathbf{C}, S) = \begin{cases} \frac{|S|+\alpha|\mathbf{C}[S]|}{\sum \mathbf{C}[S]} & \text{gdy } \alpha < \frac{|S|}{\sum \mathbf{C}[S]-|\mathbf{C}[S]|} \text{ lub } \sum \mathbf{C}[S] = |\mathbf{C}[S]|; \\ \frac{|S|+\alpha|\mathbf{C}'[S]|}{\sum \mathbf{C}'[S]} & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zgodnie z tą definicją $\psi(H_0, \mathbf{C}, S) = 1$ dla $p = n^{-\eta_2(H_0, \mathbf{C}, S)}$. Zdefiniujmy także

$$\eta_1(H_0, \mathbf{C}) = \min_{\emptyset \subsetneq S \subseteq V(H_0)} \eta_2(H_0, \mathbf{C}, S)$$

i

$$\eta_0 = \eta_0(H_0) = \max_{\mathbf{C} \in \mathcal{C}(H_0)} \eta_1(H_0, \mathbf{C}). \tag{2.10}$$

Główny wynik pracy [31] pokazuje, że $n^{-\eta_0(H_0)}$ jest funkcją progową własności posiadania indukowanej kopii H_0 w $\mathcal{G}(n, m, p)$. Warto wspomnieć, że η_2 zależy od α i dlatego η_1 i η_0 zależą także od α.

Pokrycie klikowe $\mathbf{C} \in \mathcal{C}(H_0)$ nazywamy *ściśle α-zbalansowanym* jeśli dla każdego zbioru S, $\emptyset \subsetneq S \subsetneq V(H_0)$, zachodzi $\eta_2(H_0, \mathbf{C}, S) > \eta_2(H_0, \mathbf{C}, V(H_0))$. Z definicji i wyników uzyskanych w [31] wynika, że

$$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(H_0) \stackrel{def.}{=} \{\mathbf{C} \in \mathcal{C}(H_0) : \eta_1(H_0, \mathbf{C}) = \eta_0\} \tag{2.11}$$

jest zbiorem pokryć klikowych, które będą indukować H_0 dla progowego $p = n^{-\eta_0(H_0)}$. Graf H_0 nazywamy *ściśle α-zbalansowanym* jeśli wszystkie pokrycia klikowe $\mathbf{C} \in \mathcal{C}_0$ są ściśle α-zbalansowane.

Główny rezultat w pracy [H6] podaje warunek dostateczny zbieżności $X(H_0)$ do rozkładu Poissona.

Twierdzenie 9 ([H6] Theorem 1)**.** *Niech H_0 będzie ustalonym grafem, $m = \lfloor n^\alpha \rfloor$, dla $\alpha > 0$, η_0 będzie zdefiniowane jak w (2.10) oraz $\mathcal{C}_0(H_0)$ będzie zdefiniowane jak w (2.11). Załóżmy, że $p = cn^{-\eta_0}$ dla stałej $c > 0$ oraz, że $mp^2 = o(1)$. Jeśli H_0 jest ściśle α-zbalansowany, to*

$$d_{TV}(X, P_{\lambda_0}) = o(1)$$

dla

$$\lambda_0 = \frac{1}{|\mathrm{aut}(H_0)|} \sum_{\mathbf{C} \in \mathcal{C}_0(H_0)} c^{\sum \mathbf{C}},$$

gdzie X jest liczbą indukowanych kopii grafu H_0 w $\mathcal{G}(n, m, p)$ a P_{λ_0} jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λ_0.

Wartość λ_0 jest granicą wartości oczekiwanej liczby kopii H_0 indukowanych przez pokrycia klikowe z $\mathcal{C}_0$. Nie jesteśmy w stanie określić, czy są przypadki, gdzie $\mathbb{E}(X)$ nie dąży do λ_0 przy $n \to \infty$.

Porównajmy te wyniki ze znanymi wynikami dotyczącymi $G(n, \hat{p})$ (klasyczne wyniki są zaprezentowane na przykład w rozdziale 6 monografii [30]). Dla ustalonego $S \subseteq V(H_0)$, niech $E_S(H_0)$ będzie zbiorem krawędzi H_0 o obu końcach w S. Dla $G(n, \hat{p})$ mówimy, że H_0 jest *ściśle zbalansowany* jeśli

$$\max_{\emptyset \subsetneq S \subsetneq V(H_0)} \frac{|E_S(H_0)|}{|S|} < \frac{e}{h}. \tag{2.12}$$

Oznaczmy przez $W = W(H_0)$ liczbę (nie koniecznie indukowanych) kopii ściśle zbalansowanego grafu H_0 w $G(n, \hat{p})$ oraz niech $\lambda = \mathbb{E}(W(H_0))$. Bollobás w [13] pokazał, że dla $\hat{p}$ takiego, że $\lambda \to \lambda_0$

dla pewnej stałej λ_0, W dąży do rozkładu Poissona z parametrem λ_0. Nie ma takiej zbieżności dla podgrafów, które nie są ściśle zbalansowane.

Mimo, iż pojęcie grafu ściśle α-zbalansowanego jest podobne do pojęcia grafu ściśle zbalansowanego, to jednak różnią się one od siebie. Między innymi dlatego, że pojęcie grafu α-ściśle zbalansowanego zależy od wartości α i zdefiniowane jest przez pokrycia klikowe. W ogólności rodzina grafów ściśle α-zbalansowanych nie pokrywa się z rodziną grafów zbalansowanych. Wystarczy przytoczyć przykład grafu dwudzielnego $K_{1,t}$ dla $\alpha < (t-1)/t$.

Metody dowodowe

Dowód głównego wyniku opiera się na połączeniu metody Steina zastosowanej do przybliżenia rozkładem Poissona oraz dokładnej analizy pokryć klikowych grafu H_0.

Rozdział 3

Pozostałe prace i ich omówienie

Publikacje naukowe w czasopismach znajdujących się w bazie JCR

[P1] M. Bloznelis, J. Jaworski, K. Rybarczyk. Component evolution in a secure wireless sensor network. *Networks*, 53(1):19–26, 2009.

[P2] M. Bloznelis, K. Rybarczyk. k-connectivity of uniform s-intersection graphs. *Discrete Mathematics*, 333:94–100, 2014.

[P3] J. Jaworski, M. Ren, K. Rybarczyk. Random key predistribution for wireless sensor networks using deployment knowledge. *Computing*, 85(1):57–76, 2009.

[P4] M. Klonowski, M. Kutyłowski, M. Ren, K. Rybarczyk. Mixing in random digraphs with application to the forward-secure key evolution in wireless sensor networks. *ACM Transactions on Sensor Networks*, 11(2):29:1–29:27, December 2014.

[P5] K. Krzywdziński, K. Rybarczyk. Distributed algorithms for random graphs. *Theoretical Computer Science*, 605:95–105, 2015.

[P6] K. Rybarczyk, D. Stark. Poisson approximation of the number of cliques in random intersection graphs. *Journal of Applied Probability*, 47(3):826–840, 2010.

[P7] K. Rybarczyk. Diameter, connectivity, and phase transition of the uniform random intersection graph. *Discrete Mathematics*, 311(17):1998–2019, 2011.

[P8] K. Rybarczyk. The chromatic number of random intersection graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 37:465–476, 2017.

Publikacje naukowe opublikowane w materiałach pokonferencyjnych (czasopismach innych niż znajdujące się w bazie JCR)

[P9] M. Bloznelis, E. Godehardt, J. Jaworski, V. Kurauskas, K. Rybarczyk. Recent progress in complex network analysis: Models of random intersection graphs. In Berthold Lausen, Sabine Krolak-Schwerdt, Matthias Böhmer, editors, *Data Science, Learning by Latent Structu-*

res, and Knowledge Discovery, pages 69–78. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2015.

[P10] M. Bloznelis, E. Godehardt, J. Jaworski, V. Kurauskas, K. Rybarczyk. Recent progress in complex network analysis: Properties of random intersection graphs. In Berthold Lausen, Sabine Krolak-Schwerdt, Matthias Böhmer, editors, *Data Science, Learning by Latent Structures, and Knowledge Discovery*, pages 79–88. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2015.

[P11] E. Godehardt, J. Jaworski, K. Rybarczyk. Random intersection graphs and classification. In Reinhold Decker, Hans J. Lenz, editors, *Advances in Data Analysis: Proceedings of the 30th Annual Conference of the Gesellschaft für Klassifikation e.V., Freie Universität Berlin, March 8–10, 2006*, pages 67–74. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2007.

[P12] E. Godehardt, J. Jaworski, K. Rybarczyk. Isolated vertices in random intersection graphs. In Andreas Fink, Berthold Lausen, Wilfried Seidel, Alfred Ultsch, editors, *Advances in Data Analysis, Data Handling and Business Intelligence: Proceedings of the 32nd Annual Conference of the Gesellschaft für Klassifikation e.V., Joint Conference with the British Classification Society (BCS) and the Dutch/Flemish Classification Society (VOC), Helmut-Schmidt-University, Hamburg, July 16-18, 2008*, pages 135–145. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010.

[P13] E. Godehardt, J. Jaworski, K. Rybarczyk. Clustering coefficients of random intersection graphs. In Wolfgang A. Gaul, Andreas Geyer-Schulz, Lars Schmidt-Thieme, and Jonas Kunze, editors, *Challenges at the Interface of Data Analysis, Computer Science, and Optimization: Proceedings of the 34th Annual Conference of the Gesellschaft für Klassifikation e. V., Karlsruhe, July 21 - 23, 2010*, pages 243–253. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2012.

[P14] M. Klonowski, M. Kutyłowski, M. Ren, K. Rybarczyk. Forward-secure key evolution in wireless sensor networks. In Feng Bao, San Ling, Tatsuaki Okamoto, Huaxiong Wang, and Chaoping Xing, editors, *Cryptology and Network Security: 6th International Conference, CANS 2007, Singapore, December 8-10, 2007. Proceedings, LNCS 4856,*, pages 102–120, Berlin, Heidelberg, 2007. Springer Berlin Heidelberg.

[P15] K. Krzywdziński, K. Rybarczyk. Geometric graphs with randomly deleted edges - connectivity and routing protocols. In Filip Murlak, Piotr Sankowski, editors, *Mathematical Foundations of Computer Science 2011: 36th International Symposium, MFCS 2011, Warsaw, Poland, August 22-26, 2011. Proceedings, LNCS 6907*, pages 544–555, Berlin, Heidelberg, 2011. Springer Berlin Heidelberg.

[P16] K. Rybarczyk. The degree distribution in random intersection graphs. In Wolfgang A. Gaul, Andreas Geyer-Schulz, Lars Schmidt-Thieme, and Jonas Kunze, editors, *Challenges at the Interface of Data Analysis, Computer Science, and Optimization: Proceedings of the 34th Annual Conference of the Gesellschaft für Klassifikation e. V., Karlsruhe, July 21 - 23, 2010*, pages 291–299. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2012.

[P17] K. Rybarczyk. Coupling methods to establish threshold functions in random graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 43:57–62, 2013.

[P18] K. Rybarczyk. Sharp threshold functions via a coupling method (extended abstract). In Jaroslav Nešetřil, Marco Pellegrini, editors, *The Seventh European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications: EuroComb 2013*, pages 443–448, Pisa, 2013. Scuola Normale Superiore.

[P19] K. Rybarczyk. Hamilton cycles in the line graph of a random graph *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, (The European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EUROCOMB'17)) 61:1027–1031, 2017.

Wyniki w [P2]–[P19]

Wyniki zawarte w pracy [P11] stanowiły część mojej pracy magisterskiej. Publikacje [P1, P6, P7, P12, P13, P16] zawierają rezultaty z mojej rozprawy doktorskiej.

Losowe grafy przecięć

Rezultaty z prac [P11, P12, P13, P16] dotyczą tych własności losowych grafów przecięć, które są istotne z punktu widzenia analizy skupień i zastosowań w modelowaniu sieci. W szczególności [P11] zawiera wstępne wyniki dotyczące spójności losowego grafu przecięć. W pracy [P12] przedstawione zostały wyniki dotyczące rozkładu liczby wierzchołków izolowanych w bardzo ogólnym modelu losowego grafu przecięć. Prace [P13, P16] poświęcone są współczynnikowi skupienia i ciągowi stopni wierzchołków ogólnych losowych grafów przecięć.

Prace [P1, P2, P7] dotyczą spójności i przejścia fazowego w różnych modelach losowych grafów przecięć. Motywacją do podjęcia tych problemów były zastosowania w modelowaniu sieci sensorowych z losową predystrybucją kluczy [19, 24]. W artykule [P7] wyznaczony został próg dla własności spójności i przejścia fazowego w $\mathcal{G}_u(n, m, d)$. Dodatkowo zbadana została średnica grafu $\mathcal{G}_u(n, m, d)$ powyżej przejścia fazowego i przy progu spójności. Praca [P7] wzmacnia wcześniejsze wyniki z [7, 44]. W pracach [P1, P2] rozpatrywany jest szczególny model losowego grafu przecięć, w którym wierzchołki są połączone krawędzią, gdy ich zbiory atrybutów przecinają się na co najmniej $s \geqslant 1$ atrybutach. W [P2] określona została funkcja progowa k–spójności w tym grafie a w [P1] próg przejścia fazowego.

Artykuł [P8] poświęcony jest liczbie chromatycznej grafu $\mathcal{G}(n, m, p)$. Zaproponowane zostały dwa nowe algorytmy, które kolorują w sposób właściwy graf $\mathcal{G}(n, m, p)$. Podejście algorytmiczne pozwala poszerzyć zakres parametrów, dla których wiadomo, że liczba chromatyczna jest prawie równa liczbie klikowej grafu $\mathcal{G}(n, m, p)$. Rezultaty te wzmacniają wyniki z [5].

W pracy [P6] przedstawione zostały wyniki dotyczące liczby klik na h wierzchołkach (dla ustalonego $h \geqslant 3$) w grafie $\mathcal{G}(n, m, p)$ na progu ich pojawienia się. Praca jest kontynuacją badań rozpoczętych w [31]. Główny wynik daje bardzo dokładne oszacowanie na normę całkowitego wahania (ang. total variation distance) między rozkładem liczby klik a rozkładem Poissona z odpowiednim parametrem.

Prace [P18, P17] to skrócone wersje wyników z [H5].

Artykuły [P9, P10] to artykuły przeglądowe, które przedstawiają modele losowych grafów przecięć i rezultaty ich dotyczące, ze szczególnym uwzględnieniem tych istotnych z punktu widzenia zastosowań do modelowania sieci złożonych.

Losowa predystrybucja kluczy w sieciach sensorowych

W [P3] rozważany jest model losowej predystrybucji kluczy w sieci sensorowej, który wykorzystuje informację o sposobie rozmieszczenia sensorów na powierzchni. W tym przypadku klucze rozmieszczone są na pewnym obszarze, który dzielimy umownie na siatkę sześciokątów a sensory są rozrzucone w każdym z tych sześciokątów zgodnie z zadanym rozkładem (np. normalnym). Główne wyniki dotyczą tego, jak dobrać parametry (rozmiar zbioru dostępnych kluczy, liczba wybranych kluczy) w zależności od liczby rozmieszczonych sensorów, aby sieć była spójna i informacje w niej były przekazywane efektywnie.

W pracach [P4, P14] wprowadzony i analizowany jest nowy model predystrybucji kluczy w sieciach sensorowych. Bazuje on na systemie dynamicznej zmianie kluczy. W obu artykułach rozważane jest bezpieczeństwo zaproponowanego protokołu. Problem redukuje się do wyznaczenia czasu mieszania (ang. mixing time) i rozkładu stacjonarnego spaceru losowego w pewnym losowym digrafie. W pracy [P14] została określona funkcja progowa spójności i średnica rozpatrywanego modelu digrafu. W [P4] zostało pokazane, że a.p.n. czas mieszania spaceru losowego dla rozpatrywanego modelu jest mały i dla dużych digrafów po logarytmicznej (w stosunku do liczby wierzchołków) liczbie kroków rozkład stanu spaceru nie różni się wiele od rozkładu jednostajnego. Dodatkowo pokazujemy, że otrzymane w [P4] wyniki analityczne są zgodne z wynikami eksperymentalnymi, nawet dla małych wartości n.

Algorytmy rozproszone na grafach losowych

W pracach [P5, P15] analizowana jest efektywność algorytmów rozproszonych na grafach losowych. Motywacją dla tych prac jest fakt, że grafy losowe stanowią teoretyczny model dla wielu sieci rozproszonych. W [P5] rozpatrywane są własności grafu $G(n, \hat{p})$ a praca [P15] dotyczy losowego grafu geometrycznego z losowo usuwanymi krawędziami (jest to na przykład naturalny model sieci ad hoc z losowymi zakłóceniami połączeń).

W [P15] koncentrujemy się na dwóch podstawowych problemach rozważanych w kontekście sieci ad hoc. Pierwszy problem to, jak dobrać parametry sieci, aby była spójna. Drugie zagadnienie to efektywna transmisja informacji w sieci, tzn. problem znalezienia dobrego protokołu routingu w sieci bezprzewodowej.

W [P5] rozpatrujemy kilka podstawowych problemów w teorii algorytmów rozproszonych: znalezienie maksymalnego zbioru niezależnego, kolorowanie wierzchołków, aproksymacji najmniejszego zbioru dominującego, maksymalnego skojarzenia, kolorowania krawędzi i aproksymacji największego skojarzenia. Proponujemy nowe algorytmy rozproszone, które a.p.n. efektywnie konstruują te struktury w grafie $G(n, \hat{p})$.

Grafy krawędziowe hipergrafów losowych

W [P19] znajdujemy funkcję progową dla własności posiadania cyklu Hamiltona przez graf krawędziowy grafu $G(n, \hat{p})$. Tak jak w pracy [H4] wyniki otrzymane w [P19] dają wnioski dotyczące losowego grafu przecięć. Te wyniki poprawiają rezultaty z [11] i [38].

Bibliografia

[1] N. Alon, J. H. Kim. On the degree, size, and chromatic index of a uniform hypergraph. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 18:629–646, 1997.

[2] J. Balogh, T. Bohman, D. Mubayi. Erdös-Ko-Rado in random hypergraphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 18:629–646, 2009.

[3] A. D. Barbour, G. Reinert. The shortest distance in random multi-type intersection graphs. *Random Structures & Algorithms*, 39(2):179–209, 2011.

[4] M. Behrisch. Component evolution in random intersection graphs. *Electronic Journal of Combinatorics*, 14(1):R17, 2007.

[5] M. Behrisch, A. Taraz, M. Ueckerdt. Colouring random intersection graphs and complex networks. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 23:288–299, 2009.

[6] C. Berge. On two conjectures to generalize Vizing's theorem. *Le Matematiche*, 45(1):11–24, 1990.

[7] S. R. Blackburn, S. Gerke. Connectivity of the uniform random intersection graph. *Discrete Mathematics*, 309(16):5130–5140, 2009.

[8] M. Bloznelis. Degree distribution of a typical vertex in a general random intersection graph. *Lithuanian Mathematical Journal*, 48(1):38–45, 2008.

[9] M. Bloznelis. Degree and clustering coefficient in sparse random intersection graphs. *Annals of Applied Probability*, 23:1254–1289, 2013.

[10] M. Bloznelis, J. Damarackas. Degree distribution of an inhomogeneous random intersection graph. *Electronic Journal of Combinatorics*, 20(3):P3, 2013.

[11] M. Bloznelis, I. Radavičius. A note on hamiltonicity of uniform random intersection graphs. *Lithuanian Mathematical Journal*, 51(2):155, 2011.

[12] T. Bohman. The triangle-free process. *Advances in Mathematics*, 221:1653–1677, 2009.

[13] B. Bollobás. Threshold functions for small subgraphs. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 90:197–206, 1981.

[14] B. Bollobás. *Random Graphs*. Academic Press, 1985.

[15] B. Bollobás. The chromatic number of random graphs. *Combinatorica*, 8:49–56, 1988.

[16] B. Bollobás, P. Erdős. Cliques in random graphs. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 80:419–427, 1976.

[17] B. Bollobás, P. Erdős. Cliques in random graphs. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1976:419–427, 1976.

[18] M. Bradonjić, A. Hagbergy, N. W. Hengartnerz, N. Lemons, A. G. Percus. Component evolution in general random intersection graphs. In *Algorithms and Models for the Web-Graph*, LNCS 6516, pages 36–43. Springer, 2010.

[19] H. Chan, A. Perrig, D. Song. Random key predistribution schemes for sensor networks. In *Proceedings of the 2003 IEEE Symposium on Security and Privacy*, pages 197–, 2003.

[20] M. Deijfen, W. Kets. Random intersection graphs with tunable degree distribution and clustering. *Probability in the Engineering and Information Sciences*, 23:661–674, 2009.

[21] C. Efthymiou, P. Spirakis. On the existence of hamiltonian cycles in random intersection graphs. In L. Caires, G. F. Italiano, L. Monteiro, C. Palamidessi, and M. Yung, editors, *Automata, Languages and Programming 32nd International Colloquium, ICALP 2005, Lisbon, Portugal, July 11-15, 2005. Proceedings, LNCS 3580*, pages 690–701. Springer-Verlag, 2005.

[22] P. Erdős, A. Rényi. On random graphs I. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 6:290–297, 1959.

[23] P. Erdős, A. Rényi. On the evolution of random graphs. *Publication of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, 5:17–61, 1960.

[24] L. Eschenauer, V. D. Gligor. A key-management scheme for distributed sensor networks. In *CCS '02: Proceedings of the 9th ACM conference on Computer and communications security*, pages 41–47, New York, NY, USA, 2002. ACM Press.

[25] J. A. Fill, E. R. Scheinerman, K. B. Singer-Cohen. Random intersection graphs when $m = \omega(n)$: An equivalence theorem relating the evolution of the G(n, m, p) and G(n, p) models. *Random Structures and Algorithms*, 16:156–176, 2000.

[26] A. Frieze, M. Karoński. *Introduction to Random Graphs*. Cambridge University Press, 2016.

[27] A. M. Frieze. On the independence number of random graphs. *Discrete Mathematics*, 81:171–175, 1990.

[28] A. M. Frieze, C. McDiarmid. Algorithmic theory of random graphs. *Random Structures and Algorithms*, 10(1-2):5–42, 1997.

[29] E. Godehardt, J. Jaworski. Two models of random intersection graphs for classification. In O. Opitz, M. Schwaiger, editors, *Studies in Classifcation, Data Analysis and Knowledge Organization*, volume 22, pages 67–81. Springer, 2003.

[30] S. Janson, T. Łuczak, A. Ruciński. *Random Graphs*. Wiley, 2001.

[31] M. Karoński, E. R. Scheinerman, K.B. Singer-Cohen. On random intersection graphs: The subgraph problem. *Combinatorics, Probability and Computing*, 8:131–159, 1999.

[32] J. H. Kim. Perfect matchings in random uniform hypergraphs. *Random Structures and Algorithms*, 23(2):111–223, 2003.

[33] J. H. Kim, S. J. Lee, J. Na. On the total variation distance between the binomial random graph and the random intersection graph. https://arxiv.org/pdf/1506.03389.pdf (przyjęte do *Random Structures & Algorithms*).

[34] A. N. Lagerås, M. Lindholm. A note on the component structure in random intersection graphs with tunable clustering. *Electronic Journal of Combinatorics*, 15(1):N10, 2008.

[35] T. Łuczak. The chromatic number of random graphs. *Combinatorica*, 11:45–54, 1991.

[36] D. Matula. The largest clique size in a random graph. Technical report, Dept. Comp. Sci., Southern Methodist Univerity, Dallas, Texas, 1976.

[37] S. Nikoletseas, C. Raptopoulos, P. Spirakis. Large independent sets in general random intersection graphs. *Theoretical Computer Science*, 406:215–224, 2008.

[38] S. Nikoletseas, C. Raptopoulos, P. Spirakis. On the independence number and hamiltonicity of uniform random intersection graphs. *Theoretical Computer Science*, 412(48):6750–6760, 2011.

[39] S. Nikoletseas, C. Raptopoulos, P. G. Spirakis. Colouring non-sparse random intersection graphs. In Rastislav Královič, Damian Niwiński, editors, *Mathematical Foundations of Computer Science 2009: 34th International Symposium, MFCS 2009, Novy Smokovec, High Tatras, Slovakia, August 24-28, 2009. Proceedings, LNCS 5734*, pages 600–611, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer Berlin Heidelberg.

[40] R. Di Pietro, L. V. Mancini, A. Mei, A. Panconesi, J. Radhakrishnan. Sensor networks that are provably resilient. In *Proc 2nd IEEE Int Conf Security Privacy Emerging Areas Commun Networks (SecureComm 2006), Baltimore, MD, 2006*, pages 1–10, 2006.

[41] N. Pippenger, J. Spencer. Asymptotic behavior of the chromatic index for hypergraphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 51:24–42, 1989.

[42] K. B. Singer. *Random intersection graphs.* PhD thesis, Department of Mathematical Sciences, The Johns Hopkins University, 1995.

[43] N. C. Wormald. Differential equations for random processes and random graphs. *Annals of Applied Probability*, 5:1217–1235, 1995.

[44] O. Yagan, A. M. Makowski. Zero-one laws for connectivity in random key graphs. *IEEE Transactions on Information Theory*, 58:2983–2999, 2012.

K. Rybarczyk-Krzywdzińska