Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Doroty Blinkiewicz
pt. „Zasada lokalno–globalna dla rozmaitości semiabelowych"

W algebrze i teorii liczb rozważanych jest wiele tzw. zasad lokalno–globalnych, dzięki którym rozwiązanie (trudnego) problemu „globalnego" można sprowadzić do rozwiązania stowarzyszonych problemów w uzupełnieniach/redukcjach obiektu „globalnego", czyli problemów „lokalnych". Podejście takie sięga swoimi korzeniami chińskiego twierdzenia o resztach, ma zatem niewątpliwie długą historię. Klasycznym przykładem zasady lokalno-globalnej jest globalne twierdzenie o kwadracie (ang. *global square theorem*) mówiące, że liczba wymierna jest kwadratem w $\mathbb{Q}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadratem w prawie wszystkich uzupełnieniach p-adycznych $\mathbb{Q}_p$. W roku 1975, Andrzej Schinzel sformułował zasadę lokalno–globalną (Twierdzenie 1.2.1 w recenzowanej rozprawie) dla kongruencji wykładniczych, mówiącą, że element β ciała liczbowego F jest pewnym iloczynem potęg elementów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest iloczynem potęg modulo prawie wszystkie ideały pierwsze $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}_F$. Twierdzenie Schinzla znalazło w późniejszych latach szereg uogólnień, gdzie w charakterze obiektu „globalnego" miejsce grupy multiplikatywnej ciała liczbowego zajmują krzywe eliptyczne, bądź jeszcze ogólniej rozmaitości abelowe. Zagadnienia te występują w literaturze pod zbiorczą nazwą problemu badania liniowej zależności (ang. *detecting linear dependence problem*). W recenzowanej rozprawie mgr Dorota Blinkiewicz rozważa problem wykrywania lionowej zależności w odniesieniu do grupy punktów F-wymiernych (grupy Mordella–Weila) rozmaitości semi-abelowej.

Rozprawa doktorska Doroty Blinkiewicz składa się de facto z dwóch rozdziałów. Formalnie praca liczy co prawda trzy rozdziały, ale rozdział pierwszy (zatytułowany nomen omen „Wstęp") ma charakter wyłącznie wprowadzający. Na początku rozdziału drugiego (podrozdział 2.1) Autorka pokazuje, że ograniczając się do włókien generycznych schematów semi-abelowych nie zmieniamy stowarzyszonych grup homomorfizmów. Pozwala to zawęzić dalsze rozważania wyłącznie do rozmaitości, redukując dzięki temu poziom abstrakcji wywodu. Pozostała część tego rozdziału (podrozdział 2.2) ma charakter bardziej techniczny. Głównym celem tego podrozdziału jest wykazanie twierdzeń 2.2.10 oraz 2.2.12, używanych później w rozdziale trzecim. Główne wyniki pracy (twierdzenia 3.1.7, 3.1.10 oraz 3.1.16–18) zawarte są w rozdziale ostatnim. Rozdział ten składa się z jednego tylko podrozdziału, podzielonego z kolei na dwa pod-podrozdziały. Jest to swoisty ewenement. Zdaniem niżej podpisanego, pominięcie środkowego elementu hierarchii i przekształcenie pod-podrozdziałów po prostu w podrozdziały byłoby bardziej zasadne.

Pierwszy z głównych rezultatów rozprawy (twierdzenie 3.1.7) jest uogólnieniem [BK, Theorem 4.1] na przypadek produktu $T \times A$, gdzie T jest torusem, zaś A rozmaitością abelową. Twierdzenie to ustanawia zasadę lokalno–globalną w grupie Mordella–Weila rozmaitości semi-albelowej nad ciałem liczbowym F. Zasada ta wykorzystuje prawie wszystkie – a zatem nieskończenie wiele – ideały pierwsze pierścienia liczb algebraicznych całkowitych $\mathbb{Z}_F$. W tym świetle interesujące staje się pytanie o istnienie warunków o charakterze skończonościowym. Odpowiedzi na to pytanie dostarcza drugie z głównych twierdzeń pracy (twierdzenie 3.1.10). Rezultat ten zapewnia istnienie skończonego zbioru S ideałów pierwszych, do którego wystarczy się ograniczyć sprawdzając warunki „lokalne". Twierdzenie to jest uogólnieniem na przypadek rozmaitości $T \times A$ twierdzenia [BK, Theorem 6.4]. W towarzyszącym twierdzeniu komentarzu (uwaga 3.1.11) Autorka pobieżnie wzmiankuje kwestię efektywności wyznaczania zbioru S. Szkoda, że problem ten nie został w pracy potraktowany dogłębniej.

Ostatnia część recenzowanej rozprawy jest poświęcona zasadzie lokalno–globalnej dla *współmierności* (ang. *commensurability*) podgrup w grupach Mordella–Weila. Dwie podgrupy H_1, H_2 dowolnej grupy G są współmierne, jeżeli

$$\max\left([H_i : H_1 \cap H_2],\ i = 1, 2\right) < \infty.$$

Autorka wprowadza w pracy dodatkowo pojęcie *silnej współmierności* poprzez warunek

$$H_1 \cup H_2 \subseteq H_1 \cap H_2 + G_{tor}.$$

O ile się orientuję, pojęcie to jest nowe, niestosowane wcześniej. W pracy zostały wprowadzone następnie zasady lokalno–globalne dla współmierności oraz silnej współmierności. W pierwszym przypadku odpowiedni warunek „lokalny" ma postać:

$$\max_{\mathfrak{p}}\Big(\max_{i}\big([r_{\mathfrak{p}}(H_i) : r_{\mathfrak{p}}(H_1 \cap H_2)]\big)\Big) < \infty.$$

Za drugim razem, warunek „lokalny" to:

$$r_{\mathfrak{p}}(H_1) \cup r_{\mathfrak{p}}(H_2) \subseteq r_{\mathfrak{p}}(H_1 \cap H_2) + r_{\mathfrak{p}}(G_{tor}),$$

gdzie $\mathfrak{p}$ przebiega prawie wszystkie ideały pierwsze. Dwa ostatnie twierdzenia rozprawy mówią, iż zasada lokalno-globalna dla współmierności jest równoważna z pewnym osłabieniem zasady lokalno–globalnej liniowej zależności (twierdzenie 3.1.17), zaś zasada lokalno–globalna silnej współmierności jest równoważna (pełnej) zasadzie lokalno–globalnej liniowej zależności (twierdzenie 3.1.18). Z tego w szczególności wynika, iż zasada lokalno–globalna dla silnej współmierności zachodzi w grupie Mordella–Weila rozmaitości (semi-)abelowej oraz, że dla takich grup zasada lokalno–globalna silnej współmierności implikuje zasadę lokalno–globalną współmierności. Ten ostatni fakt został przez mgr Dorotę Blinkiewicz pokazany jawnie w pełnej ogólności (twierdzenie 3.1.16) nie tylko dla grup Mordella–Weila.

Podejście lokalno–globalne do problematyki współmierności wydaje się podejściem nowatorskim, wcześniej nie spotykanym. Dlatego też ten fragment rozprawy, zdaniem niżej podpisanego, wydaje się ciekawszy, mimo, że wcześniejsza część pracy (poświęcona zasadzie lokalno–globalnej dla liniowej zależności) jest matematycznie bardziej zaawansowana.

W pracy nie zauważyłem znaczących uchybień, nie licząc drobnych potknięć redakcyjnych (np. w punkcie (2) wniosku 2.1.4.1 powinno być „oraz", czy też na stronie 9_3 winno być $U_0 \subset \mathcal{S}$). Jedyny zarzut, jaki z obowiązku recenzenckiego muszę podnieść, to, że rozprawa nie jest w pełni samoistna. W wielu miejscach Autorka pisze (np. dowód lematu 2.2.8) „...dowód przeprowadzamy analogicznie jak dowód [BK, Lemma 2.5]", czy też (dowód twierdzenia 3.1.10) „Konstruujemy zbiór skończony S^{fin} analogicznie jak w dowodzie [BK, Theorem 6.4]...", etc.. W efekcie, czytając rozprawę pani Binkowskiej, czytelnik musi mieć przed oczami równocześnie artykuł [BK]. Taki styl postępowania jest dopuszczalny (a nawet poniekąd uzasadniony) w artykule naukowym, ale już niekoniecznie w rozprawie doktorskiej.

Podsumowując, przestawione w rozprawie rezultaty są nowatorskie i interesujące. Stanowią samodzielne rozwiązanie zagadnienia naukowego i wskazują na posiadanie przez Autorkę ogólnej wiedzę teoretycznej i umiejętności prowadzenia pracy naukowej. Przedstawiona rozprawa spełnia zatem ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim. W związku z powyższym wnoszę o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie pani mgr Doroty Blinkiewicz do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Przemysław Koprowski

Katowice, 15 lipca 2017