Poznań, 14 czerwca 2017 r.

Dr hab. inż. Paweł Kolwicz, prof. nadzw.
Instytut Matematyki
Wydział Elektryczny
Politechnika Poznańska
Piotrowo 3A
60-965 Poznań
e-mail: pawel.kolwicz@put.poznan.pl

RECENZJA
rozprawy doktorskiej mgra Bartosza Staniowa zatytułowanej
„Operatory całkowe i multiplikatory między przestrzeniami funkcji holomorficznych na dysku"
dla Rady Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Teoria przestrzeni H^p nazywanych przestrzeniami Hardy'ego rozwijana była intesywnie w drugiej połowie ubiegłego wieku. Przestrzenie te znalazły zastosowanie w analizie harmonicznej, w zagadnieniach związanych z równaniami różniczkowymi czy w teorii operatorów między przestrzeniami quasi Banacha. Z drugiej strony w naturalny sposób pojawiły się przestrzenie funkcji holomorficznych na dysku jednostkowym związane z przestrzeniami Hardy'ego takie jak przestrzenie Nevanlinny, Smirnova oraz przestrzenie Priwałowa. Tematyka ta niezmiennie cieszy się niesłabnącym zainteresowaniem. W ten nurt mgr Staniów wpisał obszar badawczy dla swojej rozprawy doktorskiej.

Doktorant rozważa naturalne zagadnienia tej teorii z dobrze opisaną motywacją. Można wyróżnić 3 główne cele rozprawy. Pierwszym celem jest zbadanie operatorów całkowych z punktu widzenia naturalnego pytania o dziedzinę optymalną. Jako drugi cel autor postawił zbadanie multuplikatorów funkcyjnych dla przestrzeni funkcji holomorficznych na dysku $\mathbb{D}$ generowanych przez ciągowe przestrzenie symetryczne. Na koniec, autor bada abstrakcyjne przestrzenie Nevanlinny.

Rozprawa liczy 88 stron i składa się ze wstępu, czterech rozdziałów, spisu oznaczeń oraz bibliografii.

W rozdziale pierwszym doktorant wprowadza niezbędne pojęcia oraz przypomina klasyczne rezultaty wykorzystywane w dalszej cześci rozprawy.

Rozdział drugi dotyczy operatorów całkowych. W podrozdziale 2.1 autor rozważa naturalne pytanie o dziedzinę optymalną dla operatora Volterry $T_g : H^p \to H^p$ dla $p \in [1, \infty)$ dla pewnych funkcji generujących $g \in H(\mathbb{D})$. Przypomnijmy, że dziedzina optymalna to największa taka przestrzeń unormowana $[T_g, H^p]$ że operator $T_g : [T_g, H^p] \to H^p$ jest dobrze określony i ograniczony. Operator Cesàro $\mathcal{C}$ jest szczególnym przypadkiem operatora T_g.

Autor w tym podrozdziale wykorzystał pracę Curbery i Rickera [13] o analogicznych własnościach dla operatora Cesaro, bazując na zawatych tam technikach dowodowych. Doktorant wykazał, że istotnym rozszerzeniem dziedziny operatora $T_g : H^p \to H^p$ jest wagowa przestrzeń Hardy'ego $H(w) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \psi^{1/p} f \in H^p \right\}$, gdzie ψ jest funkcją zewnętrzną generowaną przez w (twierdzenie 2.2 oraz wniosek 2.1). Charakteryzacja dziedziny optymalnej $[T_g, H^p]$ podana jest w twierdzeniu 2.3. Zaletą tego rozdziału jest wykorzystanie powyższych wyników w podrozdziale 2.2 do operatora Libery $\mathcal{L}$, który dla $z_0 = 0$ jest szczególnym przypadkiem operatora T_g. Autor rozważa tu również inny przypadek operatora Libery $\mathcal{L}$ dla $z_0 = 1$. Na uwagę zasługuje twierdzenie 2.7 o tym że operatory Cesàro $\mathcal{C} : H^p \to H^p$ oraz Libery $\mathcal{L} : H^q \to H^q$ są wzajemnie sprzężone ($1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$). Ponadto scharakteryzowana została dziedzina optymalna $[\mathcal{L}, H^p]$ dla operatora Libery oraz wykazano inkluzję właściwą $[\mathcal{L}, H^p] \subsetneq [\mathcal{C}, H^p]$. Podrozdział 2.3 dotyczy własności dyskretnego operatora Hardy'ego L na dodatniej powłoce solidnej $S\left(\widehat{H^p_+}\right)$, gdzie $\widehat{X}$ oznacza przestrzeń ciągów powstałych ze współczynników Taylora funkcji z przestrzeni X funkcji holomorficznych na $\mathbb{D}$ oraz H^p_+ oznacza przestrzeń wszystkich funkcji $f \in H^p$ mających rzeczywiste, nieujemne współczynniki Taylora (bardziej poprawne byłoby oznaczenie $\left(\widehat{H^p}\right)_+$ zamiast $\widehat{H^p_+}$. Między innymi wykazano własność stabilności tzn. dla $1 < p < \infty$ oraz $x \in \omega$ zachodzi równoważność $LL(|x|) \in S\left(\widehat{H^p_+}\right)$ wtedy i tylko wtedy gdy $L(|x|) \in S\left(\widehat{H^p_+}\right)$. Podobny wynik dla operatora Cesàro był wykazany przez Curberę i Rickera w pracy [16], z której autor czerpał inspiracje.

Rozdział trzeci poświęcony jest multiplikatorom pomiędzy przestrzeniami typu Nikolskiego. Tematyka różnego rodzaju przestrzeni multiplikatorów była i jest intensywnie badana. Oznaczmy przez

$$\mathcal{F}E := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \left\{ \widehat{f}(n) \right\} \in E \right\},$$

gdzie E jest ciągową przestrzenią symetryczną, a $\left\{ \widehat{f}(n) \right\}$ oznacza ciąg współczynników Taylora funkcji f. Ponadto przestrzeń multiplikatorów $\mathcal{M}(\mathcal{F}E, \mathcal{F}F)$ definiujemy wzorem

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}E, \mathcal{F}F) = \{ f \in H(\mathbb{D}) : fg \in \mathcal{F}F \text{ dla każdej funkcji } g \in \mathcal{F}E \}. \tag{1}$$

Okazuje się, że $f \in \mathcal{M}(\mathcal{F}E, \mathcal{F}F)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $g \in \mathcal{F}E$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{g}(n) z^n$, $z \in \mathbb{D}$ mamy, że $\left\{ \widehat{f}(n) \right\} * \{ \widehat{g}(n) \} \in F$, gdzie splot $*$ definiujemy wzorem $x * y := \{ \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k} \}$. Przestrzeń multiplikatorów dla splotu między E oraz F autor oznacza symbolem $\mathcal{M}(E, F)$. Doktorant stawia naturalne w tej tematyce pytania. Między innymi, charakteryzuje warunki przy których $\mathcal{M}(E, F) \neq \{0\}$, wykazuje, że $\mathcal{M}(E, E) \subset \widehat{H^\infty}$ oraz dowodzi naturalnej równości $\mathcal{M}(E, F) = \mathcal{M}(F', E')$ dla maksymalnych przestrzeni symetrycznych E, F, gdzie E' oznacza dual Köthego. Podrozdział kończy twierdzenie o tym, że przestrzeń $\mathcal{M}(E, E)$ zawiera izomorficzną kopię przestrzeni l^1 dla każdej symetrycznej przestrzeni E. Duża część wyników tej sekcji stanowi uogólnienie wyników Nikolskiego z pracy [46] z przestrzeni l^p na dowolne ciągowe przestrzenie symetryczne.

Rozdział czwarty to najbardziej obszerny rozdział rozprawy poświęcony przestrzeniom typu Nevanlinny. Podrozdział 4.1 dotyczy opisu powłoki solidnej dla przestrzeni Priwałowa N^p. Idea dowodu (zgodnie z tym jak zaznacza doktorant) pochodzi z rezultatu Nawrockiego dla przestrzeni Nevanlinny oraz Smirnowa. Autor w twierdzeniu 4.4 charakteryzuje powłoki solidne $S\left(\widehat{N^p}\right)$ oraz $S\left(\widehat{N^p_+}\right)$. Podrozdziały 4.2-4.5 dotyczą abstrakcyjnych przestrzeni Nevanlinny. W podrozdziale 4.2 punktem wyjścia jest definicja klasy Hardy'ego-Orlicza H_ϕ generowana przez N-funkcję ϕ. Autor rozprawy rozważa specjalne funkcje ściśle wypukłe (w sensie Rudina) generujące przestrzeń H_ϕ i dla takich funkcji odpowiednią przestrzeń oznacza przez N_φ. Funkcje φ generujące przestrzeń N_φ są już podobne pod względem własności do funkcji generujących przestrzenie Orlicza (chociaż przestrzenie Orlicza badane są dla szerszej klasy funkcji wypukłych). Oczywiście, przestrzenie Priwałowa N^p otrzymujemy jako szczególny przypadek N_φ biorąc jako φ funkcję potęgową. Mgr Staniów rozważa klasę funkcji oznaczoną przez Φ_2^{sc} (spełniających m.in. warunek Δ_2), zdefiniowaną na str. 58 rozprawy. Autor definiuje topologię na przestrzeni N_φ przy pomocy $F-$normy $\|\cdot\|_\varphi^*$ równoważnej wyjściowej Δ-normie $\|\cdot\|_\varphi$. Następnie autor wykazuje zupełność przestrzeni $\left(N_\varphi, \|\cdot\|_\varphi^*\right)$.

W podrozdziale 4.3 autor pokazuje, że każda funkcja $f \neq 0$ z przestrzeni $N_\varphi, \varphi \in \Phi_2^{sc}$, może być jednoznacznie przedstawiona w postaci $f(z) = B(z)S(z)F(z), z \in D$, gdzie B jest iloczynem Blaschkego utworzonym z miejsc zerowych funkcji f, S jest singularną funkcją wewnętrzną, zaś F jest funkcją zewnętrzną dla przestrzeni N_φ. Analogiczne twierdzenie było wcześniej wykazane dla przestrzeni Priwałowa N^p. W dalszej autor podał zastosowania tego twierdzenia faktoryzacyjnego.

Podrozdział 4.4 dotyczy multiplikatorów z przestrzeni N_φ do H^p. Tutaj ciąg $\lambda = \{\lambda_n\}$ jest multiplikatorem dla ciągów współczynników Taylora funkcji holomorficznych. Po szeregu lematów pomocniczych autor dowodzi warunku koniecznego na to aby ciąg $\lambda = \{\lambda_n\}$ był multiplikatorem z przestrzeni N_φ do H^p (twierdzenie 4.17) przy dodatkowym założeniu o indeksie Matuszewskiej-Orlicza. Autor wykazuje następnie, że ten sam warunek jest również wystarczający w pewnej opisanej przez siebie klasie funkcji oznaczonej symbolem $\Phi_2^{sc}\left(\widetilde{\Omega}\right)$. Dowody tego podrozdziału wymagały wiele wysiłku i nietrywialnych technik, z pewnością zasługują na uznanie.

W podrozdziale 4.5 mgr Staniów charakteryzuje przestrzeń wszystkich ciągłych funkcjonałów liniowych na przestrzeni N_φ.

Rozprawa doktorska pana magistra Bartosza Staniowa zasługuje na uznanie ze względu na wykorzystywany bogaty warsztat matematyczny obejmujący elementy teorii funkcji zmiennej zespolonej, analizy harmonicznej, topologii i analizy funkcjonalnej (w tym teorii przestrzeni funkcyjnych i teorii operatorów). Ponadto wnosi ona znaczący wkład w rozwój teorii przestrzeni funkcji holomorficznych na dysku jednostkowym. Rezultaty w niej zawarte są oryginalne. Na szczególne uznanie zasługują wyniku rozdziału 4 dotyczące abstrakcyjnych przestrzeni Nevanlinny. Warte podkreślenia jest wskazanie motywacji połączone z właściwym odwołaniem do istniejących wyników oraz umiejętność prowadzenia czytelnika przez naturalne pytania do odpowiedzi. W nielicznych przypadkach brakuje pełniejszego opisu ścieżki dowodu co zmusza wnikliwego czytelnika do rachunków, a wydaje się, że w doktoracie celowe/dopuszczalne jest dokładniejsze wyjaśnianie stwierdzeń lub rozumowań (w odróżnieniu od artykułu w czasopiśmie). W dobrze napisanym rozdziale 1 zabrakło nieco dokładniejszych odwołań do literatury.

Podczas lektury nasunęło mi się kilka uwag o charakterze dyskusyjnym. Oto ważniejsze z nich (symbole A^n lub A_n poniżej oznaczają stronę A, linię n od góry lub od dołu, odpowiednio).

1. Str. 58, stwierdzono w rozprawie, że warunki (4.4) – (4.6) wynikają z prac [62] oraz [63], w których analogiczne warunki są sformułowane dla funkcji potęgowej, ponadto tylko dla warunku (4.4) autor pracy [63] stwierdza, że warunek przechodzi dla funkcji wypukłej φ zamiast potęgowej. Autor rozprawy stosuje jednak wszystkie nierówności (4.4) – (4.6) dla funkcji wypukłej φ.

2. Str. 67, dowód tw. 4.11, cytuję: "Oczywiście $F_1, F_2 \in H^\infty$. Ponadto, $F_2, 1/F_2 \in N_\varphi$". Dowód tych faktów nie wydaje się natychmiastowy.

3. Str. 73_3 : nie jest oczywiste jak z warunku Δ_2 wynika że $\varphi(t) \leq C_2 t^\beta, t \geq 1$. Ponadto powinno być $\beta > 1$ zamiast $\beta \geq 1$, gdyż $\frac{\varphi(t)}{t} \to \infty$, gdy $t \to \infty$.

4. Równoważność pomiędzy 75_1 oraz 76^1 nie wydaje się oczywista, trochę zabrakło wyjaśnień.

Ponadto znalazłem niewiele drobnych usterek, z których wymienię kilka.

1. Str. 21, w sformułowaniu twierdzenia 1.16 wykładnik potęgi powinien być równy $1 - 1/p, 0 < p < 1$.

2. Str. 40, w sformułowaniu twierdzenia 2.10 rozprawy autor błędnie wykorzystał Twierdzenie 2.5 z pracy [16]. Mianowicie:

-punkt (i) twierdzenia 2.10, $2 < p < \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $1 < p' < 2$ i należało wykorzystać twierdzenie 2.5 (b) (zamiast (a)) z pracy [16],

-punkt (ii) twierdzenia 2.10, należało wykorzystać twierdzenie 2.5 (a) z [16].

3. str. 48, w sformułowaniu Twierdzenia 3.2 zabrakło założenia, że E jest maksymalna.

Praca ma układ logiczny i przejrzysty. Precyzyjny sposób przeprowadzania dowodów świadczy o wysokim poziomie profesjonalnym doktoranta oraz o opanowaniu skomplikowanego warsztatu co daje nadzieję na samodzielny dynamiczny rozwój w przyszłości. Tematyka rozprawy jest bardzo dobrze osadzona w literaturze. Cel pracy został zrealizowany w rozdziałach drugim i trzecim i czwartym.

Ponadto uwagi dyskusyjne oraz nieliczne usterki redakcyjne nie umniejszają wartości rozprawy. Wobec tego nie wpłynęły na końcową konkluzję recenzji.

Uważam, że rozprawa doktorska pana mgr Bartosza Staniowa spełnia warunki określone w Ustawie z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (z późniejszymi zmianami) oraz bez wątpienia uzasadnia nadanie mgr Bartoszowi Staniowowi stopnia naukowego doktora nauk matematycznych.

Z pełnym przekonaniem wnioskuję o dopuszczenie pana mgra Bartosza Staniowa do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Paweł Kolwicz

Kolwicz