Zakład Przestrzeni Funkcyjnych i Równań Różniczkowych

rys historyczny i przegląd badań: cz. 2 ZRR

2023

Część pracowników obecnego Zakładu badania prowadziła w uprzednio istniejącym

Zakładzie Równań Różniczkowych

(od 1991 roku) a tradycje badań równań różniczkowych (szeroko pojętych) sięgają wyników uzyskiwanych daleko przed jego powołaniem (m.in. **W. Orlicz, A. Alexiewicz, S. Szufla, M. Dawidowski, B. Rzepecki, J. Migda** oraz *nadal pracujący Koledzy i Koleżanki z innych zakładów*...).

Ograniczymy się tu jednak do grupy **Zakładu Równań Różniczkowych** i kontunuacji badań w obecnym **Zakładzie Przestrzeni Funkcyjnych i Równań Różniczkowych**...

Pracownicy.

W aktualnie pracującej grupie:

- prof. UAM dr hab. Aneta Sikorska-Nowak
- prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń

Z dawnego składu ZRR:

- prof. dr hab. Ireneusz Kubiaczyk (kierownik ZRR)
- dr Sławomir Krzyśka
- dr Piotr Majcher
- dr Magdalena Adamczak
- dr Mohamed M.A. Metwali
- dr Samir Saker
- dr Nasr Mustafa Ali

Współpraca

Badania były i są prowadzone w szerokim gronie współpracowników z innych ośrodków, będących również współautorami prac. **Poza wymienionym uprzednio** są to m.in.

S. Sharma, B. Deshpande, M.S. Khan [India; Vigyam i in.]
S. Sessa, [Włochy; Neapol]
M. Dawidowski, J. Morchało, [Polska; PP]
M. Zima, [Polska; Rzeszów]
A. Yantir, [Turcja; Izmir]
B. Satco [Rumunia; Suceava]
A.M.A. El-Sayed, H.A.H. Salem, [Egipt; Alexandria]
D. Caponetti, V. Marraffa, [Włochy; Palermo]

i inni

Wybrane tematyki badawcze

Po powołaniu ZRR badania dotyczyły m.in. (wielu współautorów):

zagadnień ilościowej teorii równań różniczkowych (istnienie, jednoznaczność, struktura zbioru rozwiązań) wraz z utworzonymi w związku z tym narzędziami (twierdzenia o punkcie stałym, miary niezwartości, równoważne postacie zagadnień: różniczkowe i całkowe) i to wszystko dla szerokiego zakresu regularności rozwiązań (klasyczne, Carathéodory'ego, słabe, Kurzweila, pseudo-rozwiązania, dynamiczne i inne), [Kubiaczyk, Cichoń, Sikorska-Nowak, Krzyśka, Adamczak, Majcher]

badania **zagadnień dla odwzorowań wielowartościowych** (inkluzji różniczkowych i całkowych) - w tym zaadaptowanie na potrzeby tej teorii nowych pojęć ciągłości multifunkcji czy istnienia odpowiednich twierdzeń selekcyjnych (np. selektory regularne), [Kubiaczyk, Cichoń]

twierdzeń o punktach stałych (wersje słabe) oraz wybrane zagadnienia teorii punktu stałego w przestrzeniach metrycznych, [Kubiaczyk, Krzyśka, Cichoń, Ali, Sikorska-Nowak]

badań równań i inkluzji różniczkowych z miarami czy z impulsami, oraz analogicznych równań różniczkowo-funkcyjnych, badanie ich regularności, wprowadzenie odpowiednich przestrzeni rozwiązań (m.in. funkcje regularne) oraz szczegółowe zbadanie ich własności, twierdzenie typu Vidossicha dla funkcji regularnych [Cichoń]

badań w jakościowej teorii równań różniczkowych: zachowania asymptotyczne rozwiązań, oscylacyjność, stabilność rozwiązań, wersje różnicowe badanych zagadnień, praktyczne zastosowania uzyskanych wyników, [Kubiaczyk, Saker, Majcher, Sikorska-Nowak]

wprowadzenia nowego pojęcia całki nieabsolutnej Henstocka-Kurzweila-Pettisa, zbadanie jej własności i powiązanie z ogólną klasą rozwiązań równań różniczkowych i całkowych, wprowadzenie hierarchii zależności klas rozwiązań równań różniczkowych w zależności od równoważnych zagadnień całkowych z różnymi klasami całek, [Kubiaczyk, Cichoń, Sikorska-Nowak]

badań dla ogólnej klasy zagadnień: **równań dynamicznych na skalach czasowych**, twierdzenie Peano dla skal czasowych, poza tym ciągła zależność zbiorów rozwiązań względem skal czasowych (przybliżanie zagadnień poprzez przybliżanie dziedzin równań), zastosowania takich zagadnień, wykazanie, że równania z impulsami są ich szczególnym przypadkiem, [Kubiaczyk, Saker, Sikorska-Nowak, Cichoń]

badań zagadnień dla inkluzji różniczkowych z **nielokalnym warunkiem początkowym**, [Majcher, Cichoń]

badań dotyczace kwadratowych równań całkowych i całkowo-funkcyjnych - zbadanie nieciągłych rozwiązań (m.in. z przestrzeni Orlicza), co ma uzasadnienie w zastosowaniach, [Cichoń, Metwali]

spoza nurtu bezpośrednich badań dotyczacych równań różniczkowych: **zastosowanie operatorów Favarda-Durrmeyera w teorii aproksymacji**, [Sikorska-Nowak]

badań dotyczących operatorów ułamkowego rzędu - w tym związanych z nimi niezmienniczych przestrzeni funkcyjnych, oraz ich zastosowań w równaniach różniczkowych ułamkowego rzędu, również badań odnośnie równoważności lub jej braku dla zagadnień różniczkowych i całkowych ułamkowego rzędu [Cichoń, Metwali]

Wybrane uzyskane wyniki

HKP

wprowadzono nieabsolutną całkę typu słabego (całka HKP) pozwalającą, dla zagadnienia Cauchy'ego w przestrzeniach Banacha, na uzyskanie równoważnego równania całkowego i zbadano jej podstawowe własności, w tym twierdzenia typu Lebesgue'a o zbieżności ciągu takich całek [MC, IK, AS-N]

Peano

scharakteryzowano skale czasowe dla których zachodzi (lub nie) twierdzenie Peano dla równań dynamicznych [MC]

Vidossich

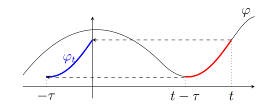
uzyskano twierdzenie Vidossicha - po raz pierwszy dla pewnych przestrzeni funkcji nieciągłych [MC, D. Caponetti, V. Marraffa]

ciągła zależność

wykazano twierdzenia o ciągłej zależności zbiorów rozwiązań równań różniczkowych z miarami od rozpatrywanych w zagadnieniach miar [MC, B. Satco] oraz analogiczną własność dla równań dynamicznych na skalach czasowych w zależności od ich dziedzin (skal czasowych) [MC, A. Yantir]

metoda kroków

wprowadzono nowy schemat metody kroków dla równań z opóźnieniem pozwalający na propagację nieciągłości i usunięcie efektu wygładzania rozwiązań w kolejnych krokach [MC, D. Caponetti, V. Marraffa]



równania kwadratowe

uzyskano warunki wystarczające dla istnienia rozwiązań kwadratowych równań całkowych w przestrzeniach Orlicza i innych przestrzeniach funkcyjnych, udowodniono ogólne twierdzenia o punkcie stałym dla iloczynu operatorów (na algebrach Banacha i trójkach przestrzeni) [MC, MM]

równania ułamkowego rzędu

wykazano nierównoważność pewnych zagadnień różniczkowych rzędu ułamkowego z dotychczas rozpatrywanymi całkami rzędu ułamkowego, wskazano konieczne modyfikacje klasycznych definicji i dobrano odpowiednie przestrzenie funkcyjne [MC, H.A.H. Salem]

funkcje regularne

zbadano własności przestrzeni funkcji regularnych, wprowadzono tam miary niezwartości [MC, M. Metwali, K.C., B. Satco]

selektory regularne

wykazano twierdzenia o istnieniu selektorów regularnych dla dużej klasy multifunkcji wraz z ich zastosowaniem do inkluzji różniczkowych z miarami [MC, KC, B. Satco]

Wspólne badania: przestrzenie funkcyjne a równania różniczkowe

Jak łączymy obie tematyki? To naturalny związek!

Przykładowo omówię to **krótko** na przykładzie dwóch klas przestrzeni funkcyjnych badanych przez nas przy okazji rozwiązywania problemów dotyczących równań różniczkowych.

1. Przestrzeń funkcji regularnych.

(czyli funkcji posiadających w każdym punkcie granice jednostronne skończone)

To naturalna przestrzeń rozwiązań *niekoniecznie będących ciągłymi* dla zagadnień równań różniczkowych (np. z impulsami), a co więcej, uniwersalna do badań różnych problemów (dotychczas próbowano rozważać przestrzenie specyficznie dobrane do zagadnienia, z dość restrykcyjnymi założeniami) [MC, BS, AS-N, VM, DC, KC].

Te funkcje są również niezbędne przy definiowaniu całki Kurzweila-Stieltjesa i jej zastosowań w równaniach różniczkowych z miarami [MC, BS, AS-N] oraz m.in. przy

zastosowaniu całki HKS w metodzie kroków (równania z opóźnieniem) pozwalając na likwidację efektu wygładzania tej metody i propagację punktów nieciągłości [NC, DC, VM].

Twierdzenie Michaela I.

Dla poszerzenia zastosowań całki HKS na inkluzje z miarami udowodniliśmy 2 warianty twierdzenia Michaela dla selektorów regularnych [MC, BS]. Podamy je dla X - p. metrycznych.

TM I

(1) Załóżmy, że multifunkcja $F : [0,1] \to 2^X$ *o wartościach wypukłych jest półciągła z dołu poza zbiorem przeliczalnym* $\{t_1, t_2, ...\}$ *i że w każdym punkcie* t_k $(k = 1, 2, ...)$ *istnieją jednostronne granice dolne w sensie Kuratowskiego* $Li_{t \to t_k^-} F(t)$, $Li_{t \to t_k^+} F(t)$ *będące zbiorami jednopunktowymi w* X *oraz, że* $lim_{t \to t_k} diam(F(t)) = 0$.
Wtedy istnieje selektor regularny $f(t) \in F(t)$, $t \in [0,1]$.

Twierdzenie Michaela II.

TM II

(2) Załóżmy, że multifunkcja $F : [0,1] \to 2^X$ *o wartościach domkniętych i wypukłych posiada w każdym punkcie* $t_0 \in [0,1]$ *niepuste granice* $F(t_0-) = Li_{t \to t_0-} F(t)$, $F(t_0+) = Li_{t \to t_0+} F(t)$ *spełniające warunki:*

$$\text{i)} \qquad F(t_0-) \subset Li_{t \to t_0-} F(t-) \cap \; Li_{t \to t_0-} F(t+);$$

$$\text{ii)} \qquad F(t_0+) \subset Li_{t \to t_0+} F(t-) \cap \; Li_{t \to t_0+} F(t+).$$

Wtedy istnieje selektor regularny $f(t) \in F(t)$, $t \in [0,1]$.

Tak dla porównania - w zbliżonych terminach oryginalny wynik Michaela ma postać: Załóżmy, że multifunkcja $F : [0,1] \to 2^X$ o wartościach domkniętych i wypukłych spełnia w każdym punkcie $t_0 \in [0,1]$

$$F(t_0) \subset Lim_{t \to t_0} F(t).$$

Wtedy istnieje selektor regularny $f(t) \in F(t)$, $t \in [0,1]$.

Inne przykłady uzyskanych wyników:

[Frankova] podała kryteria zwartości w tej przestrzeni, a my zbadaliśmy warunki na słabą zwartość zbiorów w tej przestrzeni i konsekwencje jej izomorfizmu z pewną przestrzenią funkcji ciagłych (por. **[Michalak, Drewnowski]**,) [MC,BS,KC] oraz skonstruowaliśmy moduł jednakowej regularności oraz wzór analityczny dla miary niezwartości i zbadaliśmy *postacie kontrakcji względem tej miary* z zastosowaniami [MC, MM, KC],

$$\begin{aligned} \omega_\delta^G(A) &= \sup_{x\in A} \sup_{t\in(0,1]} \sup_{s\in(0,1), t-\delta<s<t} \|x(s)-x(t^-)\| \\ &+ \sup_{x\in A} \sup_{t\in[0,1)} \sup_{s\in(0,1), t<s<t+\delta} \|x(s)-x(t^+)\| \end{aligned}$$

$$\omega^G(A) = \lim_{\delta\to 0} \omega_\delta^G(A)$$

$$\mu_G(A) = \omega^G(A) + \sup_{t\in[0,1]} \mu_X(A(t)),$$

[Moran, Goffmann, Waterman, Drewnowski] badali podprzestrzenie funkcji regularnych (izomorficzne do) sum prostych $C([a,b]) \oplus Y$ przy pewnych przestrzeniach Y, nasze wyniki poszerzają te badania na specjalnie skonstruowane podprzestrzenie $G([a,b], Y)$,

co pozwoliło nam rozwiązać zagadnienia Cauchy'ego dla równań z impulsami o zmiennych czasach impulsów i przy ich przeliczalnej liczbie,

a to dotychczas nie było możliwe [MC, DC, VM]

Wyniki z równań różniczkowych mają dość techniczne założenia i wymagałyby wprowadzenia szeregu oznaczeń i definicji. Wobec tego dla ilustracji otrzymanych wyników podam przykład zagadnienia, które może być rozwiązane za pomocą naszej metody.

Przykład. [MC,DC,VM]

Rozpatrzmy klasyczne zagadnienie Cauchy'ego bez jedyności rozwiązań i dodajmy warunek, że gdy wykres rozwiązania osiąga krzywą τ, to rozwiązanie ma skok określony pewnym warunkiem. Niech $\tau(x)$ będzie zbiorem punktów t gdzie funkcja x spełnia warunek $x(t) - 1 = 0$ (zbiór punktów nieciągłości rozwiązania). Te zagadnienie ma dla każdego rozwiązania inne punkty nieciągłości i poprzednie wyniki nie miały zastosowania w takiej sytuacji.

$$\begin{cases} x'(t) = 2\sqrt{x(t)}\ , \ \ t \notin \tau(x) \\ x(0) = x(0+) = 0 \\ x(t+) - x(t) = -1\ , \ \ t \in \tau(x). \end{cases} \tag{1}$$

2. Przestrzenie Orlicza.

Może kogoś to zdziwi, ale tak jest: te przestrzenie także pojawiają się w naturalny sposób w wielu zagadnieniach równań różniczkowych i całkowych (np. [Szufla, Sołtysiak])... Podam przykładowe, typowe sytuacje z naszych badań.

We wszelkich badanych zagadnieniach z rozwiązaniami w słabym sensie korzystamy z całek Pettisa lub Henstocka-Kurzweila-Pettisa. W rachunku pochodnych ułamkowego rzędu wprowadziliśmy przestrzenie typu Orlicza-Pettisa, zdefiniowaliśmy w nich miary słabej niezwartości, zbadaliśmy działające na nich operatory Riemanna-Liuville'a i Hadamarda, wykazaliśmy równoważność (lub jej brak) zagadnień różniczkowych i całkowych (z całką Pettisa) oraz uzasadniliśmy ich przydatność w badaniach rozwiązań słabego typu dla zagadnień brzegowych ułamkowego rzędu [MC,HS].

Zainteresował nas także np. operator Hadamarda ułamkowego rzędu (przy pewnych założeniach o g):

$$\Im_{a,g}^{\alpha,\mu} x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (g(t) - g(s))^{\alpha-1} e^{-\mu(g(t)-g(s))} x(s) g'(s)\, ds,$$

Twierdzenie.

Niech $\alpha \in (0,1]$. Dla dowolnej funkcji Younga ψ spełniającej warunek $\psi(\kappa uv) \leqslant \psi(u)\psi(v), \quad u, v \geqslant u_0$ dla pewnych $u_0, \kappa > 0$ i gdy funkcja dopełniająca w sensie Younga $\tilde{\psi}$ spełnia

$$\int_0^t \widetilde{\psi}(s^{\alpha-1})\, ds < \infty, \qquad t > 0, \tag{2}$$

to operator $\Im_{a,g}^{\alpha,\mu}$ jest zwarty z przestrzeni Orlicza $L_{\widetilde{\psi}}([a,b])$ do $L_{\psi}([a,b])$.

Przede wszystkim jednak korzystaliśmy z badań przestrzeni Orlicza przy zagadnieniach kwadratowych:

$$x(t) = F(x)(t) \cdot H(x)(t).$$

Interesują nas zwłaszcza zagadnienia, gdy x są **funkcjami nieciągłymi**. Wiadomo, że iloczyn (punktowy) funkcji z przestrzeni Orlicza $L_M(I)$ nie musi być elementem tej przestrzeni. Ale znany jest użyteczny fakt, że jeżeli rozpatrujemy pewne klasy przestrzeni Orlicza oraz $u \in L_U(I)$ i $v \in L_V(I)$, to iloczyn $u \cdot v$ należy do kolejnej przestrzeni Orlicza $L_W(I)$.

Takie podejście pozwala na poszukiwanie rozwiązań równań kwadratowych w szerokiej klasie przestrzeni. Wyniki te posłużyły nam również do uzyskania analogicznych wyników dla trójek przestrzeni o zbliżonych własnościach iloczynów [MC, MM, KC].