Piotr Pragacz
profesor
Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa

# Recenzja rozprawy doktorskiej magister Doroty Blinkiewicz

Pani magister Dorota Blinkiewicz jest doktorantką Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Jej rozprawa doktorska nosi tytuł

**Zasada lokalno-globalna dla rozmaitości semiabelowych.**

Rozprawa ta została napisana pod kierunkiem prof. dr hab. Grzegorza Banaszaka. Promotorem pomocniczym rozprawy był dr Stefan Barańczuk.

Jednym z głównych celów rozprawy jest badanie liniowej zależności punktów w grupie Mordella-Weila rozmaitości semiabelowych. Badania te zostały zapoczątkowane przez twierdzenie Schinzla o jednowymiarowych torusach (rezultat ten jest przypomniany w rozprawie w Twierdzeniu 1.2.1.) Problem badania liniowej zależności dla rozmaitości abelowych został sformuowany w roku 2002 przez Gajdę:

Niech $A$ będzie rozmaitością abelową nad ciałem $F$. Niech $P$ będzie punktem w grupie Mordella-Weila $A(F)$ oraz $\Lambda$ będzie podgrupą grupy $A(F)$. Załóżmy, że dla prawie wszystkich ideałów pierwszych $v$ w $\mathcal{O}_F$ mamy $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$. Czy implikuje to $P \in \Lambda$? (Używam tu i w dalszym ciągu oznaczeń z rozprawy.)

Wielu matematyków interesowało się tym problemem. Badania Banaszaka i Krasonia [BK], Westa [We], Banaszaka, Gajdy i Krasonia [BGK2], Gajdy i Górnisiewicza [GG], Banaszaka [B2] oraz Perucci [Pe2] stanowiły inspirację dla badań autorki. Rozmaitości semiabelowe (będące rozszerzeniami rozmaitości abelowych za pomocą torusa) pojawiły się w tej tematyce za sprawą pracy Perucci [Pe2]:

Niech $G$ będzie produktem rozmaitości abelowej i torusa, zdefiniowanym nad ciałem $F$. Niech $P$ będzie punktem w grupie Mordella-Weila $G(F)$ oraz $\Lambda$ będzie skończenie generowaną podgrupą grupy $G(F)$. Założmy, że dla prawie wszystkich ideałów pierwszych $v$ w $\mathcal{O}_F$ mamy $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$. Czy implikuje to $P \in \Lambda$?

Rozprawa składa się z 3 rozdziałów. Wstępny rozdział 1. wprowadza podstawowe oznaczenia, omawia historię problemu oraz podaje krótki opis najważniejszych rezultatów rozprawy. W rozdziale 2. zawarte są potrzebne wiadomości o rozmaitościach semiabelowych. Rozdział 3. omawia zasadę lokalno-globalną dla rozmaitości semiabelowych; bada liniową zależność punktów oraz współmierności podgrup w grupie Mordella-Weila rozmaitości semiabelowych. Tamże zawarte są główne wyniki rozprawy.

Głównym rezultatem rozprawy jest Twierdzenie 3.1.7. Niech $F$ będzie ciałem oraz $G/F$ będzie rozmaitoscią semiabelową taką że $G = T \times A$ nad $F$. Załóżmy, że $F'/F$ jest skończonym rozszerzeniem ciał takim że

$$T \otimes_F F' = G_0^{e_0} \quad \text{oraz} \quad A \otimes_F F' = G_1^{e_1} \times \cdots \times G_t^{e_t}.$$

Tutaj $G_0 = \mathbb{G}_m$ i $G_i/F'$, $i = 1, \ldots, t$, są prostymi, parami nieizogenicznymi rozmaitościami abelowymi. Załóżmy, że $e_i$, $i = 0, \ldots, t$ nie przekraczają wymiaru $H_1(G_i(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$ nad $End_{F'}(G_i) \otimes \mathbb{Q}$. Niech $P \in G(F)$ oraz $\Lambda \subset G(F)$ będzie skończenie generowaną podgrupą.

Autorka dowodzi, że jeśli $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$ dla prawie wszystkich ideałów pierwszych $v$ w $\mathcal{O}_F$, to $P \in \Lambda + G(F)_{\mathrm{tor}}$. Jesli $G(F)_{\mathrm{tor}} \subset \Lambda$, to $P \in \Lambda$ wtedy i tylko wtedy gdy $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$ dla prawie wszystkich ideałów pierwszych $v$ w $\mathcal{O}_F$.

Twierdzenie 3.1.7 inspirowane było [BK, Theorem 4.1] oraz wynikami [Pe2]. W dowodzie użyte były pewne metody i konstrukcje z [BK]. Ważną rolę grało Twierdzenie 2.2.10 o istnieniu zbioru ideałów pierwszych o dodatniej gęstości Dirichleta. (Patrz także Wniosek 2.2.11.1.)

Schinzel pokazał, że Twierdzenie 1.2.1 nie zachodzi dla 2-wymiarowego torusa. Banaszak i Krasoń również pokazali, że założenia o wykładnikach $e_i$ w [BK, Theorem 4.1] nie mogą być osłabione. Autorka podobnie pokazuje (patrz str. 29-31), że przekroczenie ograniczenia na $e_i$ w Twierdzeniu 3.1.7 prowadzi do kontrprzykladów.

Następnym ważnym wynikiem rozprawy jest Twierdzenie 3.1.10. Załozmy, że rozmaitość semiabelowa $G/F$ spełnia zalożenia Twierdzenia 3.1.7. Niech $P \in G(F)$ oraz niech $\Lambda$ będzie dowolną skończenie generowaną podgrupą $G(F)$. Wówczas istnieje skończony zbiór $S$ ideałów pierwszych $v$ pierścienia $\mathcal{O}_F$ zależący tylko od rozmaitości $G$, punktu $P$, podgrupy $\Lambda$ oraz od $\mathbb{Z}$-bazy $P_1, \ldots, P_s$ grupy Mordella-Weila $G(F)$ taki, że jeśli $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$ dla wszystkich $v \in S$, to $P \in \Lambda + G(F)_{\mathrm{tor}}$.

Jeśli $G(F)_{\mathrm{tor}} \subset \Lambda$, to $P \in \Lambda$ wtedy i tylko wtedy gdy $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$ dla wszystkich ideałów pierwszych $v$ w $S$.

Rezultat ten pokazuje, że wystarczy rozpatrywac tylko skończoną liczbę redukcji, by zbadać, czy $P \in \Lambda + G(F)_{\mathrm{tor}}$. Jest to wynik analogiczny do [BK, Theorem 6.4]. Jest to rezultat nowy; nawet dla jednowymiarowego torusa, ten rezultat nie był znany wcześniej.

Omówimy teraz wyniki rozprawy dotyczące współmierności podgrup w grupach Mordella-Weila poprzez przekształcenia redukcji. Są to rezultaty uzyskane wspólnie z promotorem profesorem Grzegorzem Banaszakiem (patrz [BB]). Badane są:
własność liniowej zależności,
własność słabej liniowej zależności,
lokalno-globalna własność współmierności,
lokalno-globalna własność silnej współmierności.

Dla przykładu, używając notacji ze strony 31, pierwsza z wymienionych własności, orzeka, że dla $P \in B(F)$ oraz podgrupy $\Lambda \subset B(F)$, jeśli $r_v(P) \in r_v(\Lambda)$, dla prawie wszystkich ideałów pierwszych $v$, to $P \in \Lambda + B(F)_{\mathrm{tor}}$.

Natomiast lokalno-globalna własność współmierności mówi, że podgrupy $\Lambda, \Lambda' \subset B(F)$ są współmierne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna $c$ taka, że dla prawie wszystkich $v$ zachodzi

$$[r_v(\Lambda) : r_v(\Lambda \cap \Lambda')] \leq c \quad \text{oraz} \quad [r_v(\Lambda') : r_v(\Lambda \cap \Lambda')] \leq c.$$

Autorka dowodzi szeregu twierdzeń na temat tych własności.

I tak w Twierdzeniu 3.1.16, autorka pokazuje, że lokalno-globalna własność silnej współmierności implikuje lokalno-globalną własność współmierności.

W Twierdzeniu 3.1.17, autorka dowodzi, że własność słabej liniowej zależności jest równoważna lokalno-globalnej własności współmierności.

W Twierdzeniu 3.1.18, autorka dowodzi, że własność liniowej zależności jest równoważna lokalno-globalnej własności silnej współmierności.

Niech $G$ będzie rozmaitoscią semiabelową nad $F$, spełniająca założenia Twierdzenia 3.1.7. Wówczas zachodzi lokalno-globalna własność silnej współmierności dla skończenie generowanych podgrup, ze względu na przekształcenia redukcji. Jest to Wniosek 3.1.19.1 z Twierdzenia 3.1.7 oraz 3.1.18. Autorka pokazuje, że jeśli pominiemy założenie (3.1.7) o wykładnikach $e_i$, to ten wniosek może nie zachodzić.

Posiłkując się Twierdzeniem 3.1.10, i odwzorowaniami redukcji, autorka dowodzi także Wniosku 3.1.19.2 o silnej współmierności dwóch skończenie generowanych podgrup w grupie Mordella-Weila.

Przejdźmy do podsumowań.

Autorka rozprawy uzyskała szereg wartościowych rezultatów na temat liniowej zależności punktów w grupach Mordella-Weila rozmaitości semiabelowych oraz współmiernosci podgrup w grupach Mordella-Weila. Są to Tw. 3.1.7, Tw. 3.1.10, Tw. 3.1.16, Tw. 3.1.17, Tw. 3.1.18, Wn. 3.1.19.1 oraz Wn. 3.1.19.2.

Umiejętnie zastosowała ona szereg technik arytmetycznej geometrii algebraicznej związanych z rozmaitościami abelowymi i semiabelowymi. Przy pomocy serii kontrprzykładów, pokazała, że udowodnione przez nią twierdzenia są optymalne.

Główne Twierdzenie 3.1.7 jest inspirowane wcześniejszym twierdzeniem Banaszaka-Krasonia, ale autorka musiała uwzględnić również czynnik torusa, którego punkty w ciele $F$ nie są skończenie generowane jak dla grupy Mordella-Weila rozmaitości abelowej. Ta praca zawiera kilka pomysłów jak rozwiązać ten bardziej skomplikowany przypadek. To się udaje dzięki kilku własnościom rozmaitości semiabelowych, które są postaci $T \times A$; zostało to umiejętnie przez autorkę wykorzystane.

Rozprawa jest zredagowana wyjątkowo starannie.

Pani Dorota Blinkiewicz ma 2 prace przyjęte do druku. Pierwsza napisana z promotorem jest częścią pracy doktorskiej, a druga z mapisana także z promotorem, Piotrem Krasoniem i Janem Milewskim dotyczy arytmetycznych metod w mechanice kwantowej.

**Uważam, że rozprawa doktorska Pani magister Doroty Blinkiewicz spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane tego typu rozprawie i wnoszę o dopuszczenie jej autorki do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

**Wnoszę także o wyróżnienie tej rozprawy.**

P. Pragacz

Warszawa 16.08.2017

Piotr Pragacz