Recenzja rozprawy doktorskiej:

Istnienie i własności asymptotyczne rozwiązań równań różnicowych w przestrzeniach Banacha oraz uniwersalny model skali czasowej i jego zastosowania.

magister Anny Kisiołek

Przedstawiona rozprawa jest poprawioną wersją pierwotnie złożnego w roku 2012 maszynopisu i liczy 106 stron. Składa się z pięciu rozdziałów, z których pierwszy to Preliminaria. W rozdziale drugim "Istnienie rozwiązań równań różnicowych" zawarte są główne wyniki pracy doktorskiej opublikowane wcześniej w trzech artykułach autorki: Asymptotic behaviour of solutions of nonlinear delay difference equations in Banach spaces, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 2005, no. 17, 2769–2774. Nonlinear difference equations in Banach spaces, Folia Math. 14 (2007), no. 1, 17–23, Asymptotic behaviour of solutions of difference equations in Banach spaces, Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. 28 (2008), 5–13, z których dwa pierwsze są wspólne z promotorem.

W krótkim rozdziale trzecim autorka przedstawia modyfikacje dla równań różniczkowych na skali czasowej wcześniejszych wyników L. Gao, J. Yana i G. Zhao, oryginalnie uzyskanych przez tych autorów dla równań różniczkowych. W dziesięcio-stronicowym rozdziale czwartym "Stabilność rozwiązań równań różniczkowych z odchylonym argumentem w przestrzeni Banacha" autorka przedstawia wyniki prac innych autorów (T. A. Burton, T. Furumochi) na ten temat uzyskane poprzez wykorzystanie twierdzenia o punkcie stałym. W ostatnim rozdziale piątym pokazane jest jak kilka wybranych prostych modeli matematycznych ekonomii może być zapisane w języku równań różniczkowych na skali czasowej.

Zgodnie z nazwą w rozdziale "Preliminaria" zawarte jest wprowadzenie do zagadnień omawianych w pracy czyli teorii równań różnicowych, teorii miar niezwartości (Kuratowskiego, Hausdorffa i słabej), a następnie twierdzeń o punkcie stałym typu Darbo. Kolejno dużo miejsca w tym rozdziale poświęcone jest przedstawieniu rachunku różniczkowego i całkowego na skali czasowej tj. pewnemu formalizmowi, który na przykład pozwala rozpatrywać jednocześnie równania różniczkowe i różnicowe. Skala czasowa to domknięty niepusty podzbiór $T \subset \mathbb{R}$, a najczęściej używane to $T = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{N}$, $T = \{h\mathbb{Z}\}$ gdzie $h \in \mathbb{R}$, czy $T = \{a_n\} \cup \{a_0\}$ gdzie $a_n \in \mathbb{R}$ jest ciągiem zbieżnym do a_0. Mała uwaga krytyczna: z dwudziestu czterech stron tej ekspozycji różnych twierdzeń z rachunku różniczkowego, a zwłaszcza całkowego, na skali czasowej wykorzystuje się później w sensie badawczym niewiele, tj. prawie nic. Można by dodać więcej uwag na temat tego pierwszego rozdziału wstępnego, ale zaniedbamy to aby więcej miejsca poświęcić merytorycznej zawartości przedstawionej rozprawy.

Przejdźmy teraz do omówienia zasadniczego rozdziału pracy tj. rozdziału drugiego "Istnienie Rozwiązań Równań Różnicowych" gdzie, jak już wspomieliśmy, autorka przedstawiła treść swoich trzech publikacji. Jak pisze ona, uogólniają one wcześniejsze prace C. Gonzalesa i A. Jimeneza-Melado dotyczące równań różnicowych w przestrzeniach Banacha. Twierdzenia tych autorów, podają warunki dostateczny i konieczny na istnienie rozwiązań asymptotycznie stałych dla pewnych klas równań różnicowych pierwszego, kolejno drugiego, i wreszcie trzeciego rzędu, i są inspirowane wcześniejszymi pracami Drozdowicza i Popendy, Popendy i Ewy

Schmeidel, oraz samej Ewy Schmeidel dla klasycznych równań różnicowych o wartościach rzeczywistych. Przypomnijmy, że rozwiązanie równania różnicowego to ciąg $\{x_n\}$, a asymptotycznie stałe oznacza, że wyraz $x_n \to a$, gdy $n \to \infty$.

Niestety przy podaniu o informacji o wymienionych rezultatach nie podaje się w ogóle, lub podaje tylko część założeń, tak że czytelnikowi jest trudno uchwycić relacje pomiędzy nimi, a twierdzeniami prezentowanymi przez autorkę, bez bezpośredniego czytania prac tamtych autorów. Co można stwierdzić na pewno, to fakt, że pani Kisiołek nie pokazuje (i nie dyskutuje) zarówno w dysertacji, jak i w swoich pracach, że sformułowany warunek dostateczny na istnienie rozwiązań badanych równań jest też warunkiem koniecznym. Jest to treścią drugiej części wspomnainje pracy Gonzalesa i Jimeneza-Melado, tak więc w tym względzie przedstawione przez mgr Kisiołek twierdzenia nie są uogólnieniem tamtych wyników.

Pierwszym z omawianych jest równanie postaci:

$$\Delta x_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_n^i f(x_{n+i}) \tag{1}$$

gdzie $x_n \in X$, X przestrzeń Banacha nad ciałem $\mathbb{R}$, lub $\mathbb{C}$ odpowiednio.

W pracy [34] dla uzyskania warunków koniecznych i dostatecznych na rozwiązanie (1) m.in. zakłada się, że $f : X \to X$ spełnia warunek Lipschitza. Jak pisze autorka zostaną one zastąpione "odwzorowaniem ciągłym z wykorzystaniem pojęcia miary niezwartości". W rzeczywistości ma to być odwzorowanie ciągłe i ograniczone oraz spełniające warunek Darbo:

$$\alpha(f(V)) \leqslant k\,\alpha(V) \quad \text{dla pewnego } k > 0\,,$$

względem miary niezwartości Kuratowskiego α i każdego wypukłego zbioru ograniczonego $V \subset X$, w obecnje wersji zakładając dodatkowo, że f jest jednostajnie ciągłe.

W następnym paragrafie dla ciągu współczynników $\{a_n^j\} \in \mathbb{R}$, lub $\in \mathbb{C}$, określającego równanie (1) definiuje się nowy ciąg stowarzyszony:

$$\alpha_n^j = \sum_{k=0}^{j} a_{n+k}^{j-k} = a_{n+j}^0 + a_{n+j-1}^1 + a_{n+j-2}^2 + \cdots + a_n^j,\ n, j \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Kolejno podane są dwa fakty nazwane "Twierdzenie 2.1" i "Twierdzenie 2.2" opisujące własności miary niezwartości w przestrzeniach ciągów o wartościach w danej przestrzeni Banacha X. Przy określeniu oznaczenia $C(N^+, X)$ jest napisane, że "oznacza przestrzeń Banacha funkcji jednakowo ciągłych określonych na przedziale $N^+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$ o wartościach w przestrzeni Banacha X z normą supremalną". W tezie tych stwierdzeń napisane jest "Wtedy dla $V \subset C(N^+, X)$:

$$\alpha(V) = \sup\{\, \alpha(V(i)) : i \in N^+\},\text{"}$$

gdzie przez α należy rozumieć miarę niezwartości Kuratowskiego.

Po tym autorka przechodzi do sformułowania Twierdzenia 2.3, będącego spolonizowaną wersją Tw. 1.4 z jej pracy [41]. Niestety i to twierdzenie jest źle sformułowane tzn. zarówno pojęcia w nim występujące nie są precyzyjnie zdefiniowane, jak i pewne założenia wynikają z innych, a w końcu niektóre są niepotrzebnie zbyt silne aby wykorzystać później stosowane (i cytowane) twierdzenia o punkcie stałym. Przejdźmy do omówienia;

- "Niech $f : X \to X$ będzie odwzorowaniem ograniczonym i jednostajnie ciągłym". Otóż założenie jednostajnej ciągłości zostało dołożone do założeń, po uwadze piszącego tę opinię w recenzji pierwotnej wersji rozprawy z roku 2012. Rzeczywiście, przy wykazywaniu ciągłości odwzorowania T wykorzystywanego w dowodzie Twierdzenia 2.3 (w takiej formie dowodu jaką prezentuje autorka) założenie jednostajnej ciągłości jest niezbędne. Jednak przedstawiony dowód znowu jest niejasny [!], a samo użycie założenie jednostajnje ciągłości nie jest wypunktowane. Pokażemy później, że jest ono zbyteczne, ale nie tylko ono, ale także główne założenie o mierze niezwartości: $\alpha(f(V)) \leqslant k\alpha(V)$, $V \subset X$ wypukły i ograniczony, jest zbyteczne [!].

- "Załóżmy, że dla pewnych $n_0 \in \mathbb{N}$ i $n > n_0$:

  1. $k_1 = \sup_{n>n_0}\{\sum_{j=0}^{\infty} \|\alpha_n^j\|\} = \sup_{n>n_0} \|\alpha_n\|_1$,
  2. $\|f(x)\| \leqslant k$, dla każdego $x \in X$,
  3. $k_1 k < 1$."

  Otóż przy już przyjętym zalożeniu $\|\alpha_n\|_1 \to 0$ i dowolnym $k > 0$ istnienie n_0 dla którego k_1 określone w 1.) spełnia 3.) jest oczywiste. Natomiast warunek 2.) jest niepotrzebnym powtórzeniem wymienionego warunku ograniczoności f. W tym miejscu powinno być napisane "$k < \infty$ niech będzie ograniczeniem średnicy obrazu $f(X)$."

- Na końcu podane jest ostatnie-kluczowe założenie

  $$"\alpha(f(V)) \leqslant k\alpha(V)$$

  dla każdego zbioru ograniczonego $V \subset X$". Tutaj α *to miara niezwartości niezwartości Kuratowskiego.* Pomijając ważny problem sprawdzenia takiego założenia, to pozostaje pytanie dlaczego występująca tu stała k jest równą (lub $\leqslant$) dokładnie stałej ograniczającej obraz f? Dla dla wykorzystywanych argumentów dowodu nie musi być!

Przejdźmy teraz do dowodu tego twierdzenia 2.3, którego teza mówi, że przy powyższych założeniach ".. dla każdego $a \in X$ istnieje rozwiązanie $x = \{x_n\} \in l_\infty(X)$, równania (1), takie, że $x_n \to x$. Zacznijmy od uwagi: autorka nigdzie nie określa co rozumie sie przez rozwiązanie równania różnicowego. Jest to oczywiście dowolny ciąg w $\prod_1^\infty X$ spełniający (1). Tak więc metoda taka dawałaby tylko rozwiązania należące do pewnej podprzestrzeni $\prod_1^\infty X$, w tym wypadku $l_\infty(X)$. Jest to częstym postępowniem zarówno w równaniach różnicowych jaki i równaniach różniczkowych, ale należałoby to zaznaczyć.

Dla dowodu tego twierdzenia pani magister Kisiolek wykorzystuje nieliniowy operator $T = T(n_0) : \prod_1^\infty X \to \prod_1^\infty X$, który przy ustalonym n_0 zadany następującą formułą:

$$(Th)_n = \begin{cases} a \text{ jeśli } n \leqslant n_0, \\ a - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_n^j f(h_{n+j}) \text{ jeśli } n > n_0 \end{cases}$$

Następnie łatwo pokazuje się, że przy tym wyborze $T = T(n_0)$ odwzorowanie T przeprowadza całą przestrzeń $l_\infty(X)$ w kulę jednostkową $B_1(a) \subset l_\infty(X)$. W szczególności przeprowadza $B_1(a)$ oznaczoną w pracy przez D w siebie. Kolejno autorka pokazuje, że odwzorowanie T jest ciągłe. Niestety, jak już pisaliśmy, jej rozumowanie jest niejasne i tak jak jest zapisane jest trochę bez sensu.

W tym punkcie magister Kisiołek wykazuje, że operator nieliniowy T ma punkt stały $h = \{h_n\} \in l_\infty(X)$ stosując wspomniane twierdzenie Darbo-Sadowskiego o punkcie stałym.

Na koniec autorka twierdzi, że ten punkt stały $h = \{h_n\} \in l_\infty(X)$ jest rozwiązaniem równania różnicowego (1), które jest asympotycznie zbieżne do a. Rzeczywiście z postaci T wynika, że dla $n > n_0$ współrzędne h spełniają te równanie, co pokazuje autorka, przy czym ten prosty rachunek jest taki sam jak w cytowanych pracach, które uogólnia. Jednak ogólnie nie jest to rozwiązanie równania (1), gdyż pierwsze n_0 współrzędnych jest równe a, czyli pierwsze n_0 różnic jest równe 0 , a po prawej stronie równania ogólnie nie ma zer [!]. W tym miejscu aby uzyskać rozwiązanie równania różnicowego Popenda i Drozdowicz oraz Gonzales i Jimenez-Melado przyjmują założenie, że dla kazdego $n \geqslant 2$ odwzorowanie $\mathrm{id} + a_n^0 f$ jest suriekcją, gdyż aby uzyskać rozwiązanie (1) należy "cofnąć się", to znaczy z rekurencji wyliczyć kolejno poprzednie wyrazy ciągu (znając następne), a do tego potrzebne jest właśnie to złożenie. Nie zawsze dodatkowe założenia na funkcję f są konieczne. Nieraz rekurencja jest tak skonstruowana, że "cofanie się" nie wymaga takich założeń, ale dotyczy to bardzo specjalnych klas równań różnicowych rzeczywistych., a dyskutowanym przypadku jest to założenie konieczne.

Tak więc, autorka nie zaznaczając tego nigdzie przez **rozwiązanie równania różnicowego (1) rozumie ciąg $\{x_n\} \in l_\infty(X)$ spełniający ciąg równości (1) dla $n > n_0$ i równy $x_n = a$ dla $n \leqslant n_0$.** Poniżej pokażemy, że przy takim rozumieniu rozwiązania można "jej twierdzenie" udowodnić bardzo prosto, przy słabszych założeniach.

Twiedrzenie: *Niech $f : X \to X$ będzie odwzorowaniem ciągłym i ograniczonym, $a \in X$ dowolną stałą. Załóżmy, że $\alpha_n = (\alpha_n^1, \alpha_n^2, \ldots, \alpha_n^j, \ldots) \in l_1(\mathbb{C})$ i $\|\alpha_n\|_1 \to 0$ gdy $n \to \infty$.*

Wtedy istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że ciąg

$$x_n = \begin{cases} a & \textit{jeśli } n \leqslant n_0, \\ \tilde{x}_n & \textit{jeśli } n > n_0 \end{cases}$$

należy do $l_1(X)$, a współrzędne $\tilde{x}_n$, dla $n > n_0$ spełniają równanie różnicowe (1). Co więcej to rozwiązanie jest jedyne i asymptotycznie równe a.

Dowód: Niech k będzie ograniczeniem średnicy $f(X)$. Ponieważ $\|\alpha_n\|_1 \to 0$ gdy $n \to \infty$, więc istnieje takie n_0, że dla $k_1 := \sup_{n>n_0}\{\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_n^j|\} = \sup_{n>n_0}\|\alpha_n\|_1$ mamy $2\,k_1\,k < 1$.

Wtedy odwzorowanie T zdefiniowane wzorem;

$$(Th)_n = \begin{cases} a & \text{jeśli } n \leqslant n_0, \\ a - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_n^j f(h_{n+j}) & \text{jeśli } n > n_0 \end{cases}$$

przeprowadza $l_1(X)$ w $l_1(X)$ i jest kontrakcją. Rzeczywiście

$$\|T(x) - T(y)\| = \sup_i \|T_i(x) - T_i(y)\| \leqslant \sup_i \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_i^j| \|f(x_{i+j}) - f(y_{i+j}\| =$$
$$\sup_{n>n_0} \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_n^j| \|f(x_{n+j}) - f(y_{n+j}\| \leqslant \sup_{n>n_0} \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_n^j|\,(k+k) \leqslant 2\,k\,k_1 < 1\,.$$

Tak więc, T przeprowadza $l_1(X)$ w siebie (przy $y = 0$) i jest kontrakcją. Konsekwentnie z tw. Banacha ma dokładnie jeden punkt stały $h = (h_1, \ldots, h_n, \ldots,) \in B_1(l_1(X))$. Łatwo sprawdzić (co jest w recenzowanej rozprawie), że h jest rozwiązaniem (1) asymptotycznie równym a (z tym, że rozwiązaniem w wyżej opisanym sensie [!]). $\square$.

Duża część powyżej opisanych uwag, lub podobnych, odnosi się do kolejno przedstawianych twierdzeń rozdziału drugiego, a mianowicie twierdzeń 2.4, 2.5 i 2.6, ale ze względu koniecznośc nie zwiększania nadmiernego objętości recenzji i jej z założenia bardziej ogólny charakter, nie będziemy ich podawać.

W tym miejscu warto zatrzymać się trochę przy historii wprowadzenia tego typu dowodów, bazujących na wcześniejszych analogicznych rozumowaniach w teorii równań różnicowych, gdyż nie jest to zawarte w przedstawionej rozprawie. Pojawiły się one w latach 80-tych XX wieku. W 1984 dowód taki jest w pracy Sui Sun Cheng-a z Tajwanu. W 1987 tego typu dowód używany był w cytowanej pracy Popendy i Drozdowicza. Ten typ dowodu pojawił się w pracach Johna Graef'a, ale to Jerzy Popenda był niewątpliwie jednym z pionierów jej wykorzystania.

Zanim przejdziemy do omówienia kolejnych rozdziałow przedstawionej rozprawy pozwolę sobie na pewną ogólniejszą uwagę. Teoria równań różnicowych powstała jako próba "dyskretyzacji" równań różniczkowych, tak aby móc te pierwsze badać bardziej algorytmicznie, w szczególności wykorzystywać możliwości jakie daje informatyka, to jest obliczenia komputerowe. W związku z tym nie widać specjalnie sensu aby uogólniać klasyczne wyniki na abstrakcyjne przestrzenie Banacha bez specjalnego powodu, a brak jakiegokolwiek przykładu w literaturze utwierdza chyba w tym przekonaniu. Zdaniem wielu matematyków aktywnych w tej dziedzinie (np. Stefan Hilger z Niemiec) teoria równań różnicowych jest topologicznie prostsza niż teoria równań różniczkowych, ale bardziej skomplikowana algebraicznie. Docenia sie więc algebraiczną stronę publikowanych rezultatów i związane z tym klasyczne metody aproksymacyjne jak sumowalność, czy metody numeryczne, co ma ścisły związek z możliwościami wykorzystania obliczeń komputerowych.

Tu warto dodać, że zarówno w rozprawie jaki w artykułach pani Kisiołek nie ma żadnego przykładu ilustrującego jej rozważania dotyczące równań różnicowych.

W kolejnym rozdziale trzecim przedstawia się twierdzenie o tym, że wszystkie rozwiazania pewnego równania różniczkowego na skali czasowej są oscylujące. Jest to adpatacja do "skali czasowej" wyniku Q. Zhanga, J. Yana i J. Gao dla analogicznego równania różniczkowego dokonana przez panią Kisiołek. Rozumowania i techniczne elementy dowodów są analaogiczne do ich pierwowzorów w wymienionej pracy mateamtyków chińskich.

W następnym rozdziale czwartym "Stabilność rozwiązań równań różniczkowych z odchylonym argumentem w przestrzeni Banacha" autorka przedstawia wyniki prac innych autorów (T. A. Burton, T. Furumochi, a także A. Ardjouni i A. Djoudi)) o stabilności rozwiązań takich równań uzyskane poprzez wykorzystania twierdzeń o punkcie stałym. Znowu autorka opisuje wyniki tych autorów.

Ostatni prawie trzydziesto stronicowy rozdział piaty "Zastosowanie Rachunku Różniczkowego na Skali Czasowej w Ekonomii" zawiera przegląd podstawowych, prostych i klasycznych modeli matematycznych ekonomii, ale w ujęciu na skali czasowej, co pozwala zapisać w jeden sposób formuły "ciągłe" jaki i "dyskretne". Nie ma w nim teoretycznego wkładu własnego autorki rozprawy, ale tekst ilustrowany wieloma przykładami jest materiałem, który mógłby być wykorzystany do wykładu na ten temat.

Oceniając wartość merytoryczną omawianej rozprawy należy stwierdzić, że wkład autorki w badaną teorię jest albo śladowy (Rozdziały trzeci i czwarty), albo wobec tego co zostało wskazane powyżej, jest wątpliwy tam gdzie miał być najbardziej istotny (Rozdział drugi). W rozdziale piątym wkład ma charakter opracowania dydaktycznego. Techniki używane w pracy, nawet jeśli powielane, nie wychodzącą poza najprostsze elementarne szacowania.

Zgodnie z tradycją i wymogami należało by także ocenić stronę formalną przedstawionej rozprawy. Nie jest to też mocna strona pracy, choć pani Kisiołek włożyła sporo wysiłku aby poprawić złożony tekst w stosunku do wersji rozprawy przedstawionej w roku 2012. Niemniej jednak jest tam nadal sporo drobnych błędów, i ogólnie widać brak umiejętnosci pisania tekstów matematycznych m.in. precyzyjnego definiownia używanych pojęć, jasnego formułowania twierdzeń, precyzjnego używania odnośników i zazanaczania co było znaae wcześniej, a co jest wkładem autorki. Można by podać wiele przykładów, ale nie robimy tego, aby nie wywołać wrażenia, że negatywna ocena strony formalnej pracy jest podstawą do wyrażonej ponizej oceny ogólnej.

Podsumowując, z przykrością trzeba stwierdzić, że nie widać podstaw aby można było uznać, że omawiana praca spełnia wymogi Ustawy z dnia 14 marca 2003 roku o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki ($ 13, pkt 1.) i jej nowelizacji z dnia 18 marca 2011 roku (także $ 13, pkt 1.)

Rozprawa doktorska, przygotowywana pod opieką promotora, powinna stanowić oryginalne rozwiązanie problemu naukowego lub artystycznego oraz wykazywać ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w danej dyscyplinie naukowej lub artystycznej, a także umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej lub artystycznej.

W związku z tą negatywną oceną rozprawy, wnoszę o niedopuszczenie jej autorki do dalszych etapów przewodu doktorskiego

Marzantowicz

Poznań, 21 listopada, 2015 roku

Wacław Marzantowicz
Wydział Matematyki i Informatyki UAM