AGH

Dr hab. Piotr Oprocha, prof. nadzw.
Akademia Górniczo-Hutnicza
Wydział Matematyki Stosowanej
al. A. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków
e-mail: oprocha@agh.edu.pl

Kraków, 2 kwietnia 2015

RECENZJA

rozprawy doktorskiej **mgra Adama Przestackiego** zatytułowanej
„Composition operators on the space of smooth functions"

Rozprawa doktorska mgra Adama Przestackiego, będąca przedmiotem tej recenzji, składa się z 72 stron i podzielona została na 3 rozdziały. Zawiera streszczenie (j. poski i j. angielski), spis treści, indeks oraz bibliografię. Praca została napisana pod kierunkiem prof. Pawła Domańskiego. Praca napisana jest w języku angielskim. Rozprawa dotyczy badań nad własnościami operatora kompozycji C_ψ i ważonego operatora kompozycji $C_{w,\psi}$ na przestrzeni funkcji gładkich $C^\infty(\Omega)$.

Materiał przedstawiony w rozprawie jest dobrze dobrany, a przedstawione wyniki tworzą spójną całość, tak tematycznie jak i metodologicznie. Rozprawa napisana jest w sposób przejrzysty. Obszerny rozdział pierwszy zawiera w zasadzie wszystkie niezbędne fakty potrzebne do przeprowadzenia dowodów tak, że czytelnik nie musi szukać ich w pozycjach bibliograficznych. To w znaczący sposób ułatwia lekturę pracy oraz w wygodny sposób pozwala podążać za prezentowanym w dowodach rozumowaniem tym bardziej, że przedstawione fakty zostały dostosowane do notacji używanej dalej w rozprawie.

W rozdziale 2 autor stara się odpowiedzieć na pytanie kiedy operator kompozycji $C_\psi\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $F \mapsto F \circ \psi$ ma obraz domknięty, gdzie $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest pewną ustaloną funkcją gładką. Autor dowodzi, że w rozważanym kontekście domkniętość obrazu operatora C_ψ implikuje semi-właściwość (ang. „semiproper") funkcji ψ, natomiast dokładając pewne dodatkowe założenia o pochodnych ψ można uzyskać implikację odwrotną (Twierdzenie 2.2.3). Dzięki temu autor jest w stanie podać przykłady operatorów o domkniętym obrazie, oraz na tej podstawie formułuje hipotezę badawczą proponującą warunek w pełni równoważny domkniętości obrazu C_ψ (Hipoteza 2.2.11).

Kolejnym zagadnieniem rozważanym w rozdziale 2 jest podanie warunków gwarantujących, że funkcja gładka g indukuje funkcję gładką $|g|^\theta$ dla każdego $\theta \in (0, 1)$. Głównym wynikiem tej części rozprawy jest Twierdzenie 2.3.4 które charakteryzuje gładkość $|g|^\theta$ przy pomocy warunku na pochodne we włóknie $g^{-1}(\{0\})$ (istnienie tzw. dobrych punktach płaskich, ang. „nice flat points"). Dowód jest techniczny i przebiega w kilku krokach. Opiera się o sprytne oszacowania pochodnej, m.in. przy zastosowaniu Twierdzenia 1.1.4. przytoczonego w rozdziale 1. W dalszej części rozdziału autor wykorzystuje dobre punkty płaskie do podania warunku wykluczającego domkniętość obrazu operatora C_ψ w Twierdzeniu 2.4.1. Następnie używa tego wyniku do podania przykładu operatora C_ψ którego obraz nie jest domknięty. Jako ostatni wynik, autor podaje Wniosek 2.4.3. który charakteryzuje w pełni domkniętość obrazu C_ψ, przy założeniu, że wszystkie punkty płaskie ψ są dobre.

W rozdziale 3 autor skupia się przede wszystkim na aspektach dynamicznych związanych z iteracją ważonego operatora kompozycji $C_{w,\psi}\colon C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ jest zbiorem otwartym, a $\psi\colon \Omega \to \Omega$, $w\colon \Omega \to \mathbb{C}$ są funkcjami gładkimi. Jest to więc spojrzenie na rozważany wcześniej operator z innego punku widzenia oraz w bardziej ogólnym przypadku. W pierwszej kolejności autor udowadnia Lemat 3.2.1, który mimo iż prosty w dowodzie, zawiera obserwacje odnośnie funkcji ψ i w kluczowe w dalszej części pracy. Dowód Lematu 3.2.2. jest długi i techniczny. Został on podzielony przez autora na kilka krótszych kroków, co niezwykle ułatwia śledzenie dowodu oraz wpływa na jego przejrzystość. Biorąc pod uwagę podobne zabiegi w rozdziale 2, dowodzi to pewnej dojrzałości matematycznej autora.

Dowód Lematu 3.2.4 jest bardzo bliski dowodowi Lematu 3.2.3. Wydaje się, że można by zintegrować oba dowody udowadniając na początku, że jeśli operator $C_{w,\psi}$ jest hipercykliczny, to

$$N(U_1, U_2) \cap N(U_1, U_1) \cap \{n : \psi_n(K) \cap K \neq \emptyset\} = \emptyset$$

gdzie U_1, U_2 sa określone tak jak w dowodzie Lematu 3.2.3 (zaraz poniżej (3.2.10)), a $N(U,V) = \left\{n : C^n_{w,\psi}(U) \cap V \neq \emptyset\right\}$. Wtedy dowód Lematu 3.2.3 sprowadza się do obserwacji, że zbiór $N(U_1, U_2) \cap N(U_1, U_1)$ jest nieskończony przy tych założeniach, więc nie może zachodzić (3.2.10), a w przypadku Lematu 3.2.4 zbiór $N(U_1, U_2) \cap N(U_1, U_1)$ ma dopełnienie skończone, więc nie może zachodzić (3.2.13).

Główny wynik sekcji 3.2 stanowi Twierdzenie 3.2.6. (i Wniosek 3.2.7) podające charakteryzację słabego mieszania dla operatora $C_{w,\psi}$. Podobnie Twierdzenie 3.2.9 przynosi warunki równoważne, charakteryzujące mieszanie. Już na samym początku pojawia się definicja wymiatania i silnego wymiatania (ang. run-away). Pierwsze pytania jakie przychodzi na myśl brzmi czy są to rzeczywiście inne pojęcia. Niestety nie znajdujemy odpowiedzi na to pytanie ani w przykładach na stronie 45 ani też później. Natomiast przedstawione wyniki sugerują, że znalezienie ew. przykładu rozróżniającego te dwie definicje w ogólnym przypadku może być problematyczne (Uwaga 3.1.5, 3.2.10 oraz Lemat 3.4.2). Jest to jeden z głównych powodów, które nie pozwalają połączyć Twierdzeń 3.2.6 i 3.2.7 w jedno. Autor jest w stanie takie połączenie osiągnąć jedynie w specjalnym przypadku $\Omega = \mathbb{R}$ otrzymując ładną charakteryzację w Twierdzeniu 3.4.4. dowodząc, że hipercykliczność jest odpowiedzialna za o wiele bogatszą dynamikę rozważanego operatora. W zasadzie cały dowód Twierdzenia 3.4.4, sprowadza się do dowodu jednej implikacji która nie wynika z wczesniejszych rozważań prowadzonych w rozpawie. Jej dowód polega na konstrukcji gęstej rodziny funkcji okresowych dla operatora $C_{w,\phi}$, co udaje się dzięki sprytnemu zastosowaniu silnej własności wymiatania.

Czasem niestety w rozprawie zabrakło szerszego spojrzenia na rozważane pojęcia. Dla przykładu definicja tranzytywności pochodzi prawdopodobnie od Birkhoffa, lecz Twierdzenie 1.2.4 jest szczególnym przypadkiem o wiele bardziej ogólnego faktu. Da się udowodnić, że jeśli $T\colon X \to X$ jest ciągłym odwzorowaniem na przestrzeni metrycznej, to gęstość orbity implikuje tranzytywność o ile X nie ma punktów izolowanych (lub f jest suriekcją). Natomiast tranzytywność wymusza istnienie punktu o gęstej orbicie m.in. w ośrodkowych przestrzeniach zupełnych. Z kolei Twierdzenie 1.2.10 jest wnioskiem z twierdzenia Furstenberga mówiącego, że układ (X,T) jest słabo mieszający wtedy i tylko wtedy gdy układ $(X^{(n)}, T^{(n)})$ jest tranzytywny dla każdego $n \geqslant 2$, gdzie $X^{(n)}$ oznacza n-krotny iloczyn Kartezjański. Furstenberg udowodnił to twierdzenie w roku 1966 dla przypadku metrycznej przestrzeni zwartej X i homeomorfizmu T, jednak dla samego dowodu wystarczają o wiele słabsze założenia. Jak można się domyślić, w Twierdzeniu 1.2.10 założenie, że T jest operatorem a X ma dodatkowe własności przestrzeni Frécheta są nadmiarowe. W mojej ocenie komentarz na temat postępów ogólnej teorii związanej z rozważanymi pojęciami mógł by być ciekawym uzupełnieniem rozprawy.

Rozprawa jest zredagowana w sposób bardzo staranny. Jedynie w kilku miejscach pojawiają się drobne błędy edytorskie. Pozwolę sobie przytoczyć poniżej kilka z nich:

44^9 : powinno być „$\psi_n(x) =$" zamiast „$\psi(x) =$"

44^{12} : można by zyskać na czytelności, gdyby definiować $\psi_{-n}\colon \psi_n(\Omega) \to \Omega$ dla $n > 0$, a nie jak obecnie $\psi_n\colon \psi_{-n}(\Omega) \to \Omega$ dla $n < 0$.

47^{15} : powinno być „these cases" zamiast „this cases".

51_3 : powinno być „Case 1" zamiast „case 1".

51^6 : powinno być „$f \in U_1$" zamiast „$f_1 \in U_1$".

56^5 : definiując h, φ_1 i φ_2 chyba bezpieczniej użyć w miejsce U_1, V_1 zbiorów otwartych U_1', V_1' spełniających $\overline{U_2} \subset U_1' \subset \overline{U_1'} \subset U_1$ oraz $\overline{V_2} \subset V_1' \subset \overline{V_1'} \subset V_1$. Powoduje to, że funkcje φ_1, φ_2 są stale równe 0 blisko brzegu U_1, V_1, dzięki czemu nie trzeba się tłumaczyć, że „sklejenie" w ramach funkcji h nie zepsuje gładkości.

56_3 : w tym i kilku innych miejscach stosowane jest niejednolite oznaczenie 1., 2., ... w stosunku np. do Wniosku 3.2.7 na następnej stronie, gdzie mamy (1), (2), ...

57^2 : "Since every weakly mixing operator is hypercyclic"; używaliśmy już podobnej implikacji, np. w dowodzie Lematu 3.2.3, jednak bez żadnego komentarza.

57^6 : powinno być „(1)–(4)" zamiast „1–4".

57^{10} : konstrukcja „let us take U and V to be two..." brzmi dziwnie. Chyba lepiej „Let us fix any two nonempty open sets $U, V \subset C^\infty(\Omega)$"

58^3 : konsekwentnie, można było użyć listy numerowanej, np. (i), (ii), ... Podobnie w Twierdzeniu 3.3.1.

63^7 : w tym momencie wiemy już, że (5) $\Leftrightarrow$ (6). Wystarczy zatem wykonać dowód (6) $\Rightarrow$ (4) zamiast odwoływać się w dowodzie, że „run-away property" implikuje „strong run-away property", np. w 63_9.

64_{10} : „containing" czy „contained"?

68 : skoro autor zadał sobie trud stworzenia indeksu rozważanych pojęć, warto było w nim zawrzeć odniesienia także do symboli, np. definicji $C^n_{w,\psi}$, ψ_n itp.

69 : „Ann. of Math (2)" to nazwa czasopisma, zatem bez pogrubienia **(2)**; w [4], [17], [19], [24], [27] numer zeszytu powinien być włączony w tom tak jak w innych pozycjach, czyli np. **101A(1)**, **232(1)** i **98(2)**; numery stron w [42] powinny pojawić się jako pp.183–187 tak jak w [2]; w [42], [46] i [52] brakuje kropki na końcu.

Mimo, że rozprawa nie korzysta wprost z zaawansowanych pojęć analizy funkcjonalnej, a wiele z przeprowadzanych rozumowań opiera się o klasyczną analizę rzeczywistą, przeprowadzone dowody są niejednokrotnie sprytnym połączeniem wielu różnych faktów, oszacowań i kroków pośrednich. Kilka z przedstawionych dowodów wymaga długich i technicznie skomplikowanych rozważań a ścieżka prowadząca do końcowego wyniku nie jest w najmniejszym stopniu oczywista. Widać wyraźnie, że autor ma sporą intuicję w tematyce rozważanej w rozprawie, a same dowody zostały opracowane w sposób bardzo elegancki. W całej rozprawie jest stosowana konsekwentnie ta sama notacja co dowodzi, że autor przebył sporą drogę od pierwszych dowodów swoich wyników do ich formy obecnej.

Art. 13 ust. 1. *ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki* stwierdza, że „Rozprawa doktorska, [...] powinna stanowić oryginalne rozwiązanie problemu naukowego lub oryginalne dokonanie artystyczne oraz wykazywać ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w danej dyscyplinie naukowej lub artystycznej oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej lub artystycznej". W mojej opinii przedstawiona rozprawa, pomimo wskazanych wcześniej drobnych niedociągnięć spełnia te wymagania rozszerzając w sposób istotny wiedzę na temat operatorów kompozycji C_ψ i ważonych operatorów kompozycji $C_{w,\psi}$ na przestrzeniach funkcji gładkich $C^\infty(\Omega)$, a w szczególności wiedzę na temat własności dynamicznych tych operatorów. **W związku z powyższym, wnioskuje o przyjęcie rozprawy doktorskiej i dopuszczenie mgra Adama Przestackiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**