Elementarny dowód twierdzenia Josefsona-Nissenzweiga, w przypadku przestrzeni Banacha $C(K \times L)$.

Wiesław Śliwa (UR)

Abstrakt. J. Kąkol, D. Sobota i L. Zdomskyy w pracy *On complementability of* c_0 *in spaces* $C(K \times L)$ [Proc. Amer. Math. Soc., 152(2024), 3777-3784], używając metod probabilistycznych (słabego prawa wielkich liczb dla rozkladu Bernouliego) udowodnili, że dla dowolnych nieskończonych przestrzeni zwartych K i L istnieje znormalizowany ciąg (μ_n) miar znakowanych o skończonych nośnikach na produkcie $K \times L$, który jest *słabo zbieżny do 0 w $C(K \times L)^*$ (tzn. taki, że $\mu_n(f) \to_n 0$ dla każdego $f \in C(K \times L)$).

Wspólnie z J. Kąkolem, używając jedynie elementarnych metod kombinatorycznych, udowodniliśmy mocniejszą wersję tego twierdzenia, w której pokazaliśmy dodatkowo, między innymi, że

$$\sup_{A\times B\subset K\times L} |\mu_n(A \times B)| = \frac{1}{n2^n} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Stąd wynika, że

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} < \sup_{A\times B\subset K\times L} |\mu_n(A \times B)| < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Następnie pokazaliśmy, że istnieje znormalizowany ciąg $(\varphi_n) \subset C(K \times L)$ nieujemnych funkcji o nośnikach parami rozłącznych, taki, że podprzestrzeń $E := \{\sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n : (x_n) \in c_0\}$ w $C(K \times L)$, jest izometrycznie izomorficzną kopią c_0, dopełnialną w $C(K \times L)$.

Jeżeli założymy dodatkowo, że przestrzenie zwarte K i L są zero-wymiarowe, to ciąg (μ_n) (oraz każdy jego podciąg) posiada podciąg mocno normalny, który jest *słabym ciagiem bazowym w $C(K \times L)^*$.