**Opinia o rozprawie doktorskiej mgra Adama Przestackiego zatytułowanej "Composition operators on the space of smooth functions"**

To obszerne opracowanie (72 strony) należy do najsolidniejszych i najelegantszych prac doktorskich, z jakimi miałem w ostatnich latach do czynienia. Składa się ono z dwóch odrębnych części (nie licząc części wprowadzającej), które łączy badanie *operatorów kompozycji* w przestrzeniach funkcji gładkich (nieskończenie różniczkowalnych) w podzbiorach otwartych przestrzeni $\mathbb{R}^d$. Motywem przewodnim części pierwszej jest pytanie, dla jakich funkcji gładkich $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ obraz operatora

$$C_\psi : C^\infty(\mathbb{R}) \ni F \to F \circ \psi \in C^\infty(\mathbb{R})$$

jest domknięty w $C^\infty(\mathbb{R})$. Problemem tym w przypadku przestrzeni funkcji holomorficznych, bądź też analitycznych rzeczywistych zajmowało się wielu znanych matematyków, takich jak Glaeser, Bierstone, Milman, Pawłucki, Domański, Langenbruch i wielu innych. Znane są też podobne wyniki dla klasy $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ w przypadku, gdy funkcja $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ jest gładka i iniektywna. Doktorant podjął próbę uzyskania ich analogonów dla funkcji $\psi$ gładkich, ale niekoniecznie iniektywnych, co stanowi istotną trudność. W drugiej części autor bada dynamikę operatorów składania z wagą

$$C_{w,\psi};\ C^\infty(\Omega) \ni F \to\ w \cdot (F \circ \psi) \in C^\infty(\Omega)$$

dla gładkich funkcji $\psi : \Omega \to \Omega$, $w : \Omega \to \mathbb{C}$ (lub $\mathbb{R}$), gdzie tym razem $\Omega$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^d$. Podaje w szczególności warunki konieczne i wystarczająve na to, aby operator $C_{w,\psi}$ był *hipercykliczny* (co oznacza, że istnieje funkcja $f \in C^\infty(\Omega)$ taka, że zbiór z $\{C^n_{w,\psi}(f) :\ n \geq 1\}$ jest gęsty w $C^\infty(\Omega)$), *słabo mieszajacy* (dla każdych czterech niepustych zbiorów otwartuch $U_1, U_2, V_1, V_2$ w $C^\infty(\Omega)$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że oba zbiory $C^n_{w,\psi}(U_1) \cap V_1$ i $C^n_{w,\psi}(U_2) \cap V_2$ są niepuste), bądź też *mieszajągy* (dla każdych dwóch niepustych zbiorów otwartych $U, V$ w $C^\infty(\Omega)$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $n \geq n_0$ zbiór $C^n_{w,\psi}(U) \cap V$ jest niepusty). Operatory takie w różnych klasach funkcji badało wielu renomowanych specjalistów, na przykład Erdman i Mortini, Bonet i Domański, Kalmes i Niess, a także wybijający siė młody matematyk z Krakowa Sylwester Zając. Nikt jednak nie rozważał tych problemów w przestrzeni funkcji gładkich, stąd wyniki doktoranta są w tej materii pionierskie.

Przejdźmy do konkretnych rezultatów. W pierwszej części autor podaje warunek wystarczający na funkcję gładką, semiwłaściwą $\psi$, aby operator $C_\psi : C^\infty(\mathbb{R}) \ni F \to F \circ \psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ miał domknięty obraz (Theorem 2.2.3): 1) każde włókno $\psi$ nad punktem brzegowym $b$ zbioru $\psi(\mathbb{R})$ (czyli zbiór $\psi^{-1}(b)$) ma punkty niepłaskie; 2) każde włókno $\psi$ nad punktem wewnętrznym zbioru $\psi(\mathbb{R})$ zawiera albo punkt niepłaski i nieekstremalny, albo też zawiera równocześnie niepłaski punkt lokalnego minimum i niepłaski punkt lokalnego maksimum. Jest to jednowymiarowy analogon warunku wystarczającego z rezultatu Kenesseya i Vengenrotha z 2011 roku, w którym zakładano,że funkcja $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ jest dodatkowo iniektywna oraz klasycznego rezultatu Glaeserea z roku 1963 dla funkcji $\psi$ analitycznych rzeczywistych. Posługując się dalej ważnym (zob. Theorem 2.3.4) pojęciem *przyjemnego* (nice) punktu płaskiego $x_0$ gładkiej funkcji $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (dla każdego $n \geq 1$ i dla każdego $\theta \in (0,1)$ istnieje otoczenie $U$ punktu $x_0$ takie, że dla każdego $x \in U$ mamy $|\psi^{(n)}(x)| \leq |\psi(x) - \psi(x_0)|^{\theta}$), autor znajduje też warunek konieczny na domkniętość zbioru $C_\psi(C^\infty(\mathbb{R})$ (Theorem 2.4.1): jeśli istnieje punkt $b \in \psi(\mathbb{R})$ taki,że brzeg choć jednego ze zbiorów $\{x \in \mathbb{R} : \psi(x) > b\}$, $\{x \in \mathbb{R} : \psi(x) < b\}$ jest niepusty i zawiera jedynie przyjemne punkty płaskie, to obraz operatora $C_\psi$ nie jest domknięty. Z obu powyższych rezultatów wynika następująca charakteryzacja domkniętości obrazu operatorów $C_\psi$ (Corollary2.4.3): Załóżmy, że każdy punkt płaski funkcji gładkiej $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest przyjemnym punktem płaskim. Obraz operatora $C_\psi$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi$ jest funkcją semiwłaściwą, która albo jest stała, albo spełnia następujące warunki: 1) każde włókno $\psi$ nad punktem brzegowym zbioru $\psi(\mathbb{R})$ zawiera punkty niepłaskie; 2) każde włókno $\psi$ nad punktem wewnętrznym zbioru $\psi(\mathbb{R})$ zawiera albo punkt niepłaski i nieekstremalny, albo równocześnie punkt niepłaski lokalnego minimum i punkt niepłaski lokalnego maksimum.

W drugiej części rozprawy autor daje pełną charakteryzację słabo mieszających operatorów $C_{w,\psi}$: (Theorem 3.2.6): taki operator jest słabo mieszxający, jeśli spełnione są następujące warunki: 1) funkcja wagowa $w$ jest różna od zera na całym $\Omega$; 2) funkcja $\psi$ jest iniektywna; 3) $\det[\psi'(x)] \neq 0$ w całym $\Omega$; 4) funkcja $\psi$ jest *run-away* (tego określenia nie będę tłumaczył na polski), tzn. dla każdego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że zbiór $K \cap \psi_n(K)$ jest pusty, gdzie $\psi_n = \psi \circ \cdots \circ \psi$ jest $n$-krotnym złożeniem. Przy dodatkowym założeniu, że waga $w$ jest rzeczywista, autor pokazuje też (Corollary 3.2.7), że $C_{w,\psi}$ jest słabo miksujący wtedy i tylko wtedy, gdy jest hipercykliczny. Jeśli w Twierdzeniu 3.2.6 własność *run-away* funkcji $\psi$ zamienimy na własność *strong run-away*, czyli taką, że dla każdego zwartego $K \subset \Omega$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $n \geq n_0$ zbiór $K \cap \psi_n(K)$ jest pusty, to otrzymamy wtedy (Theorem 3.2.9) charakteryzację operatorów miksujących. W końcu, gdy wymiar $d = 1$, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $w : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, autor pokazuje, że wszystkie badane w pracy własności operatora $C_{w,\psi}$ - hipercykliczny, słabo mieszający, mieszający - są równoważne.

Dowody tych elegancko formułujących się twierdzeń są niebanalne, wymagają czasem benedyktyńskiej pracy i biegłości w technikach liczeniowych. Wyniki, jakie doktorant otrzymał, nie wyczerpują zamierzeń, jakie sobie postawił: wiele z nich czeka na wykazanie ich "w pełnej krasie". To stwarza perspektywę do dalszych badań - dodajmy - w ważnej, aktualnej i bardzo interesującej dziedzinie.

Mam nieco zastrzeżeń do języka angielskiego pracy: denerwuje zwłaszcza manieryczne nadużywanie "that" (we have that, we get that, we obtain that, itd.). Są też występki przeciwko francuskim akcentom i rodzajowi żeńskiemu w referencjach [14], [25] i [26] (Glaesera nie należy poprawiać!).

Konkludując, uważam, że dysertacja pana Adama Przestackiego spełnia z nadmiarem wymogi stawiane pracom doktorskim przez ustawę z dnia 18 marca 2011 roku o zmianie ustawy - Prawo o szkolnictwie wyższym, ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki oraz o zmianie niektórych innych ustaw i wnoszę o dopuszczenie pana Adama Przestackiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Uważam ponadto, że ta rozprawa zasługuje na wyróżnienie.

WPleśniak

Prof. dr hab. Wiesław Pleśniak

*Kraków, dnia 1 maja 2015 roku*