**Opinia o rozprawie doktorskiej
magistra Tadeusza Chawziuka
zatytułowanej**

**Operatory kompozycji i mnożenia pomiędzy
różnymi przestrzeniami Orlicza.**

Rozprawa doktorska magistra Tadeusza Chawziuka dotyczy badania własności operatorów kompozycji i mnożenia w przypadku przestrzeni Orlicza. Bardziej precyzyjnie, niech (Ω, Σ, μ) and (Ξ, Σ_1, ν) będą przestrzeniami z miarą oraz niech $T : \Xi \to \Omega$ oraz $u : \Omega \to \mathbb{R}$ będą funkcjami. Wtedy dla funkcji $f : \Omega \to \mathbb{R}$ operator kompozycji C_T zdeterminowany przez T jest dany wzorem $C_T(f) = f \circ T$. Natomiast operator mnożenia M_u zdeterminowany przez u jest dany wzorem $M_u(f) = uf$. Badanie własności takich operatorów zastało zapoczątkowane pracami Ryffa (zob. 42 w bibliografii rozprawy) i Nordgrena (zob. 35, i 36 w bibliografii rozprawy) w kontekście przestrzeni funkcji analitycznych.Operatory mnożenia i kompozycji były również rozważane w przypadku przestrzeni Bergmana, przestrzeni Hardy'ego, przestrzeni L_p oraz przestrzeni Orlicza (zob. [6, 10, 11, 12, 15, 26, 28, 43, 44] w bibliografii rozprawy). Wydaje sie że pierwszy artykuł dotyczący opertatora kompozycji w przypadku przestrzeni Orlicza autorstwa R. Kumara został opublikowany w 1997 roku (zob. 27 w bibliografii rozprawy). Ponadto w opublikowanej w 2004 roku pracy autorstwa Cui, Hudzika, Kumara i Maligrandy (zob. 7 w bibliografii rozprawy) badano ciągłość oraz zwartość operatora kompozycji działającego z przestrzeni Orlicza L^ϕ do tej samej przestrzeni Orlicza. Istotna jest tu również praca *Multiplication and composition operators between two L^p-spaces* autorstwa H. Takagi oraz K. Yokouchi (zob.46 w bibliografii rozprawy) dotycząca wlasności operatorów mnożenia i kompozycji działających pomiędzy przestrzeniami L^p o różnych wykładnikach. Powyżej wymienione pozycje (przede wszystkim praca [46]) stanowiły motywację dla autora rozprawy do badania własności operatorów kompozycji i mnożenia działających z przestrzeni Orlicza L^ϕ do przestrzeni Orlicza L^ψ **(między różnymi przestrzeniami Orlicza).**

Recenzowana rozprawa składa się ze wstępu, pięciu rozdziałów i bibliografii liczącej 46 pozycji.
Rozdział pierwszy zawiera podstawowe fakty potrzebne w dalszej części rozprawy. Znajdujemy tu między innymi definicję przestrzeni Orlicza, normy Luxemburga, różnych wersji warunku Δ_2 jak również precyzyjną definicję operatorów kompozycji i mnożenia (zob. Def. 1.10 i 1.11). Istotne są tu również wagowe przestrzenie Orlicza (zob. str. 8 rozprawy) związane z operatorami kompozycji i mnożenia potrzebne w dalszych rozdziałach.

Orginalne rezultaty uzyskane przez doktoranta znajdują się w drugim, trzecim, czwartym i piątym rozdziale rozprawy.
Rozdział drugi zawiera twierdzenia charakteryzujące ciagłość operatorów mnożenia i kompozycji (między różnymi przestrzeniami Orlicza) przy pomocy tzw. metody wewnętrznej, tzn. odwołującej się wyłacznie do wlasności funkcji generujących te przestrzenie. Twierdzenia 2.2 - 2.5 z podrozdziału 2.1 dostarczaja różnych warunków koniecznych i dostatecznych na ciągłość operatora mnożenia dla przestrzeni

Orlicza nad dowolnymi przestrzeniami z miarą. Uogólniają one w szczegolności w przypadku przestrzeni L^p, rezultaty ze wspomnianej powyżej pracy *Multiplication and composition operators between two L^p-spaces* autorstwa H.Takagi oraz K. Yokouchi. Podobną strukturę ma porozdział 2.3 w którym podano warunki konieczne i dostateczne na ciągłość operartora kompozycji dla przestrzeni Orlicza nad dowolnymi przestrzeniami z miarą (zob. Tw. 2.6 - 2.9). Ponadto Lematy 2.2 i 2.3 podają zależności między normami operatora kompozycji T i skojarzonego z nim operatora mnożenia zdeterminowanego przez pochodną Radona-Nikodyma transformacj T. Autor pokazuje również że dla operatora kompozycji badanego w przypadku przestrzeni L^p i L^q dla $1 < p$, $1 < q$ i $p \neq q$ Twierdzenia 2.6 - 2.9 podają warunek równoważny jego ciągłości.
W rozdziale trzecim, moim zdaniem głównym rozdziale rozprawy, autor kontynuuje badanie ciagłości operatorów mnożenia i kompozycji przy pomocy tzw. metody zewnętrznej tzn. korzystającej z własności wagowych przestrzeni Orlicza (zob. str. 8 rozprawy) związanych z operatorami kompozycji i mnożenia. Bazuje ona na rezultatach Ishi i Shragina dotyczących inkluzji między przestrzeniami Musielaka-Orlicza (zob. Tw. 3.1 i Tw. 3.16).
W podrozdziale 3.1 rozważany jest operator kompozycji w przypadku miar bezatomowych. Najistotniejsze rezultaty tego podrozdziału to Tw. 3.4 podające warunek równoważny na ciągłość operatora kompozycji. Ponadto Tw. 3.5 i 3.6 podają oszacowanie normy operatora kompozycji. Wypada wspominieć że rezultaty podrozdziału 3.1 uogólniają pewne wyniki ze wspomnianej powyżej pracy *Multiplication and composition operators between two L^p-spaces* (zob. Tw. 3.7). Dalsza część podrozdziału 3.1 dotyczy problemu czy pochodna Radona - Nikodyma h transformaty T należy do L^∞ o ile operator kompozycji C_T jest ciągły. Z Tw. 3.7 wynika że w przypadku $1 < p = q$, $h \in L^\infty$. Przyklad 3.1 pokazuje że w przypadku przestrzeni Orlicza tak byc nie musi. Twierdzenie 3.8 podaje natomiast warunek wystarczający (w języku funkcji Φ i Ψ determinujących odpowiednie przestrzeni Orlicza) na to aby $h \in L^\infty$ w przypadku ciągłego operatora kompozycji T. Kolejny problem rozważany w tym podrozdziale motywowany Tw. 3.7 dotyczy faktu czy pochodna Radona-Nikodyma h transformaty T może być funkcją stałą > 0 o ile $\mu(T(\Xi)) = +\infty$. Przykład 3.2 pokazuje że ogólnie tak może być, a Tw. 3.9 podaje warunek dostateczy, który gwarantuje że funkcja stała > 0 nie może być pochodną Radona-Nikodyma transformaty T o ile C_T jest ciągła i $\mu(T(\Xi)) = +\infty$. Natomiast Twierdzenia 3.10 - 3.13 to kolejne kryteria dotyczące ciagłości operatora kompozycji, w których wystepuje pochodna Radona-Nikodyma h transformaty T. Ponadto Tw. 3.14 i 3.15 podają warunki konieczne i dostateczne na surjektywność operatora C_T.
W podrozdziale 3.2 rozważany jest operator kompozycji w przypadku przestrzeni ciągowych Orlicza. Jego struktura jest podobna do struktury podrozdziału 3.1. I tak w Tw. 3.17 i 3.18 podane są warunki równoważne ciągłości operatora kompozycji, a Tw. 3.19 i 3.20 podają oszacowania jego normy. Ich konsekwencją jest w szczególności Tw. 2.21 które zostało uzyskane w pracy autorstwa H.Takagi oraz K. Yokouchi. Pozostała cześć podrozdziału dotyczy problemu istnienia ciągłego opertatora kompozycji z nieograniczoną pochodną Radona-Nikodyma (zob. Przykład 3.3 i Tw. 3.22). Ponadto Tw. 3.23 i 3.24 podają warunki wystarczające na ciągłość operatora kompozycji. Podrozdział 3.3 dotyczy przypadku dowolnej miary, a jego wyniki

są konsekwencją wcześniej udowodnionych rezultatów.
Natomiast własności operatora mnożenia (metoda zewnętrzna) w przypadku miary bezatomowej badane są w podrozdziale 3.4. Tw. 3.26 podaje warunek równoważny ciągłości operatora mnożenia między przestrzeniami Orlicza, a Tw. 3.27 i 3.28 oszacowania jego normy. Warunek równoważny ciągłości operatora mnożenia w przypadku przestrzeni L_p ppodany jest w Tw. 3.29. W dalszej cześci tego podrozdziału autor rozważa problem czy dla funkcji nieograniczonej albo stałej u operator mnożenia może byc ciągły (zob. Tw. 3.30, Przykł. 3.5 i Tw. 3.31). Istotne są tu również Tw. 3.36 i 3.37 w których badana jest surjektywnosć operatora M_u.
Rozdział czwarty rozprawy dotyczy jednostajnej absolutnej ciągłości (zob. Def. 4.2, str. 57) i zwartości operatorów kompozycji i mnożenia. Struktura tego rozdzialu jest taka sama jak rozdziału trzeciego. Podrozdział 4.1 dotyczy operatora kompozycji w przypadku przestrzeni Orlicza z miarą bezatomową. Najważniejsze rezultaty w nim zawarte to Tw. 4.1, 4.3 podające warunki konieczne i dostateczne jednostajnej absolutnej ciągłości operatora kompozycji. Tw. 4.5 podaje warunki równoważne jednostajnej absolutnej ciągłości operatora kompozycji w przypadku przestrzeni L_p. Natomiast kryterium dotyczące zwartości to Tw. 4.10. Analogiczne rezultaty dotyczące przypadku ciągowego zawarte są w podrozdziale 4.2 (zob. Tw. 4.11 - 4.17). Jednostajna absolutna ciągłość i zwartość operatora mnożenia rozważana jest w podrozdziale 4.3 (przypadek miary bezatomowej) i podrozdziale 4.4 (przypadek ciągowy). Moim zdaniem, najistotniejsze wyniki tych podrozdziałów to Tw. 4.18, 4.21, 4.23 i 4.25.
Rozdział piąty dotyczy charakteryzacji operatorów kompozycji i mnożenia które mają domknięty obraz, są skończenie wymiarowe oraz są operatorami Fredholma (tzn. operatorów o domkniętym obrazie, którego kowymiar jest skończony). Tw. 5.1 i 5.2 charakteryzują skończenie wymiarowe operatory mnożenia, a Tw. 5.3 i Tw. 5.4 skończenie wymiarowe operatory kompozycji (metoda wewnętrzna). Natomiast Tw. 5.5, 5.6 i 5.7 podają warunki konieczne i dostateczne dla operatorów mnożenia i kompozycji o domkniętym obrazie poprzez wyżej wspomnianą metodę zewnętrzną. Rozdział kończą Tw. 5.7, 5.8 i 5.9, ktore charakteryzują operatory kompozycji i mnozenia będące operatorami Fredholma.

Moim zdaniem, przedstawiona mi do oceny rozprawa doktorska prezentuje wysoki poziom merytoryczny i wnosi istotny wkład w teorię operatorów kompozycji i mnożenia . Materiał w niej zawarty, moim zdaniem, z powodzeniem wystarczyłby na dwa doktoraty. Szczególnie chciałbym tu wyróżnić Przykłady 3.1 i 3.2 zwiazane z problemem ograniczoności pochodnej Radona-Nikodyma operatora kompozycji, Tw. 3.4 i 3.26 podające warunki równoważne na ciągłość operatora kompozycji i operatora mnożenia, Tw. 4.1 i 4.18 dotyczące absolutnej jednostajnej ciągłości operatora kompozycji i operatora mnożenia oraz rezultaty z rozdziału piątego. Jednak mam pewne zastrzeżenia co do redakcji rozprawy. Zawiera ono mnóstwo kryteriów dotyczących własności operatorów kompozycji i mnożenia, których założenia są dosć techniczne i trudno jest czytelnikowi ocenić ich użyteczność. Autor powinien podać wiecej przykładów do których te kryteria można zastosować. Zauważmy że w Rozdziale drugim mamy 9 twierdzeń i 1 przyklad, w Rozdziale trzecim 37 twierdzen i 5 przykładów, w Rozdziale czwartym 27 twierdzen i 0 przykładów i w Rozdziale piątym 9 twierdzeń i 0 przykładów. Moim zdaniem lepiej byłoby zaprezentowac w rozprawie mniej kryteriów i więcej przykładów konkretnych operatorów dla których można je zastosować lub pokazujących że jeżeli dla danego operatora nie są spełnione założenia jednego kryterium to można stosować do niego inny rezultat. Trzeba jednak stwierdzić że przypadek przestrzeni Orlicza jest dużo trudniejszy od przypadku przestrzeni L_p a rezultaty doktoranta zastosowane do przestrzeni L_p prowadzą zwykle do warunków równoważnych do badanych własności operatora i dostarczają krótszych dowodów znanych wcześniej twierdzeń dla przestrzeni L_p.

Biorąc pod uwagę wyżej wymienione argumenty, z pełną odpowiedzialnością stwierdzam, że rozprawa doktorska magistra Tadeusza Chawziuka spełnia warunki określone w art. 13 ust. 1 Ustawy z dnia 18 marca 2011 roku o zmianie ustawy -Prawo o szkolnictwie wyższym, ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki.
Zatem wnioskuję o dopuszczenie magistra Tadeusza Chawziuka do dalszych etapów przewodu doktorskiego i o nadanie mu stopnia naukowego doktora nauk matematycznych.

Kraków, dnia 21 maja 2018 roku

Prof. dr hab. Grzegorz Lewicki
Profesor zwyczajny w Instytucie Matematyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie

Grzegorz Lewicki