Prof. dr hab. Maria Nowak,
Instytut Matematyki UMCS
Pl. M. Curie-Skłodowskiej 1,
20-031 Lublin

Lublin, 29.08.2016

Recenzja rozprawy doktorskiej Pana mgr. Michała Rzeczkowskiego "Operatory kompozycji i miary Carlesona w teorii przestrzeni Hardy'ego-Orlicza na obszarach"

Recenzowana praca składa się zasadniczo ze wstępu i czterech rozdziałów. Rozdział pierwszy ma charakter wprowadzający do tematyki pracy i zawiera wybrane definicje i twierdzenia dotyczące przestrzeni Orlicza oraz przestrzeni Hardy'ego-Orlicza na dysku jednostkowym, odwzorowań konforemnych oraz miary harmonicznej i jej związku z funkcjami harmonicznymi.

Rozdział drugi i trzeci rozprawy są poświęcone przestrzeniom Hardy'ego-Orlicza $H^\Phi(\Omega)$ na tzw. uogólnionym obszarze kołowym $\Omega \subset \mathbb{C}$, którego brzeg składa się ze skończonej liczby nietrywialnych, rozłącznych i analitycznych krzywych Jordana. O definiującej funkcji Orlicza Φ autor zakłada, że jest ona funkcją logarytmicznie wypukłą, czyli funkcja $\Phi(e^t)$ jest wypukła na $\mathbb{R}$. Założenie to implikuje podharmoniczność funkcji $u(z) = \Phi(|f(z)|)$ w obszarze analityczności funkcji f. Przestrzeń $H^\Phi(\Omega)$ jest zdefiniowana jako przestrzeń tych funkcji f analitycznych na Ω, dla których funkcja $\Phi(|f|/\varepsilon)$, dla pewnego $\varepsilon > 0$, ma harmoniczną majorantę na Ω. Przy dodatkowym założeniu na funkcję Φ, że dla pewnej stałej dodatniej spełniony jest warunek $\Phi(t/K) \leq \frac{1}{2}\Phi(t)$ przestrzeń $H^\Phi(\Omega)$ jest przestrzenią quasi Banacha, a w przypadku gdy Φ jest wypukła jest przestrzenią Banacha. Otrzymujemy w ten sposób naturalne uogólnienie przestrzeni Hardy'ego H^p, $0 < p < \infty$, na takich obszarach, które zostały wprowadzone przez W. Rudina w 1955 roku. W pracy przedstawiono dwa zasadnicze twierdzenia dotyczące przestrzeni $H^\Phi(\Omega)$; twierdzenie o rozkładzie, które mówi, że przestrzeń $H^\Phi(\Omega)$ można przedstawić w postaci pewnej sumy prostej oraz twierdzenie o reprezentacji funkcji $f \in H^\Phi(\Omega)$ za pomocą funkcji brzegowych (w przypadku gdy Φ jest funkcją wypukłą).

W dalszym ciągu autor rozważa funkcje Hardy'ego-Orlicza na pierścieniu $A = \{z \in \mathbb{C} : r_0 < |z| < 1\}$. W rozdziale trzecim zostały zdefiniowane dwie pewnego rodzaju ważone przestrzenie Bergmana funkcji holomorficznych na pierścieniu $\mathbb{A}$; $B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})$ oraz $B_\infty^{\omega,v}(\mathbb{A})$. Główne twierdzenie tego rozdziału mówi, że przy pewnych założeniach na funkcję Orlicza Φ ($\Phi \in \overline{\Delta(\alpha,\beta)}, \beta < 1$) powłoka Banacha przestrzeni $H^\Phi(\mathbb{A})$ jest izomorficzna z pewną przestrzenią $B_1^{\varphi,\psi}(\mathbb{A})$. Ponadto wykazano, że przestrzeń dualna $H^\Phi(\mathbb{A})^*$ jest izometrycznie izomorficzna z pewną przestrzenią $B_\infty^{\omega,v}(\mathbb{A})$. Wyniki te nawiązują do wcześniejszych publikacji matematyków takich jak M. Pavlovic, P. Duren, A. Shields, J. Shapiro i innych.

W rozdziale czwartym autor rozważa operatory kompozycji na przestrzeniach Hardy'ego-Orlicza $H^{\Phi}(\Omega)$. Zakłada on przy tym, że funkcja Orlicza Φ jest funkcją wypukłą, a Ω jest tzw. obszarem kołowym czyli kołem jednostkowym z usuniętymi mniejszymi nieprzecinającymi się kołami domkniętymi. Dla funkcji holomorficznej $\varphi : \Omega \to \Omega$ operator kompozycji C_{φ} definiujemy wzorem $C_{\varphi}(f) = f \circ \varphi$ dla $f \in H^{\Phi}(\Omega)$. W latach 2008-2012 operatory takie na przestrzeniach Hardy'ego-Orlicza były badane między innymi przez P. Lefèvra, D. Li, H. Queffélеca i L. Rodrigueza-Piazzę dla przestrzeni Hardy'ego -Orlicza na dysku jednostkowym i na pierścieniu. Ponieważ operator C_{φ}, podobnie jak w przypadku klasycznych przestrzeni Hardy'ego, jest ograniczony na przestrzeni $H^{\Phi}(\Omega)$ badania koncentrują się nad zagadnieniem zwartości tego operatora. W charakteryzacji zwartości tych operatorów ważnymi pojęciami jest miara Carlesona, która jest związana z operatorem inkluzji $j_{\mu} : H^{\Phi}(\Omega) \to L^{p}(\Omega, \mu)$ i uogólniona licząca funkcja Nevanlinny określona wzorem:

$$N_{\varphi}(w) = \sum_{\varphi(z)=w} g_{\Omega}(z, p), \quad w \in \Omega \setminus \{\varphi(p)\},$$

gdzie $g_{\Omega}(z,p)$ oznacza funkcję Greena dla obszaru Ω z biegunem w punkcie p. Uogólniona funkcja licząca Nevanlinny została wprowadzona przez S. Fischera i J. E. Shapiro w 1999 roku.

Dzięki twierdzeniu o rozkładzie przestrzeni $H^{\Phi}(\Omega)$ (twierdzenie 2.3) autor może wykorzystywać metody i techniki wyżej wspomnianych matematyków do przypadku obszarów wielospójnych i otrzymać uogólnienia ich wyników.

W redakcji recenzowanej rozprawy zauważyłam drobne błędy drukarskie i nieścisłości. Wspomnę tylko o niektórych z nich. Niedokładne są, na przykład, przedstawione przez autora definicje analitycznego łuku swobodnego na str 13. oraz punktu brzegowego prostego na str 14. Również mam pewne zastrzeżenia do końcówki dowodu lematu 1.5. Lemat ten jest oczywiście prawdziwy. Jednak jest błąd (drukarski) w ostatniej równości w 5. wierszu od dołu i rozważania poniżej tego wiersza nie są dla mnie zrozumiałe.

Na początku rozdziału czwartego jest stwierdzenie 4.2 (str.45), w wypowiedzi i dowodzie którego pojawiają się niezdefiniowane funkcje $u^{i}_{p,s}$. Definicję tych funkcji znalazłam w dowodzie twierdzenia 2.6 na stronie 27.

Ogólnie mówiąc ta rozprawa doktorska jest napisana bardziej w stylu publikacji czasopisma matematycznego niż pracy doktorskiej. Zabrakło mi dokładniejszego omówienia tła badań i przykładów oraz porównania otrzymanych wyników ze wcześniejszymi znanymi rezultatami. Zdaję sobie też sprawę z faktu, że przy tylu różnych zagadnieniach podejmowanych w tej pracy jest to bardzo trudne zadanie.

Powyższe uwagi dotyczące redakcji recenzowanej rozprawy doktorskiej nie wpływają znacząco na moją wysoką ocenę tej pracy pod względem merytorycznym. Autor musiał zapoznać się z wieloma aspektami analizy zespolonej i funkcjonalnej takimi jak odwzorowania konforemne, miary harmoniczne, funkcja Greena dla obszarów płaszczyzny zespolonej, przestrzenie Hardy'ego-Orlicza oraz operatory na przestrzeniach funkcji holomorficznych. W ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat pojawiło się szczególnie dużo prac dotyczących operatorów kompozycji i nie jest łatwo dołączyć do tak rozwiniętej teorii.

Podsumowując uważam, że recenzowana praca reprezentuje wysoki poziom i zawiera wiele ciekawych rezultatów. Praca ta świadczy o szerokiej wiedzy i opanowaniu narzędzi współczesnej analizy. Spełnia ona wymogi stawiane pracom doktorskim w Ustawie o stopniach i tytule naukowym i wnioskuję o dopuszczenie Pana Michała Rzeczkowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

M Nowak

Maria Nowak